Center for the Study of Finance and Insurance
Osaka University

Discussion Paper Series 2009-03

# 離散ヘッジ戦略の漸近有効性

深澤　正彰

Center for the Study of Finance and Insurance
Osaka University

# 離散ヘッジ戦略の漸近有効性

深澤 正彰[*]

## 1 はじめに

デリバティブ契約に伴う将来のペイオフを, 原資産と安全資産の動的ポートフォリオによって複製 (ヘッジ) するという, 金融工学において最も基本的な問題を考える. Black-Scholes モデルなど完備市場の枠組においても, ポートフォリオの組替えが有限回に制限されるという現実的な設定の下では, もはや任意のペイオフを完全にヘッジすることはできない. この原資産の取引回数制約に起因にするヘッジエラーのリスクを, 本稿では**離散ヘッジリスク**と呼ぶ. 確率ボラティリティモデル等非完備なモデルにおいては, デリバティブ契約に係るリスクはボラティリティ変動に係るリスク (非完備性に由来するリスク) と, 離散ヘッジリスクに分解することができる. 本稿の目的は離散ヘッジリスクの規準を導入し, この規準に対して最適な離散ヘッジ戦略を構成することである. 本稿では非完備性に由来するリスクは扱わず, ヘッジすべきペイオフの内, 連続的なポートフォリオ組替えによってヘッジ出来る部分を, 離散的なポートフォリオ組替えによってヘッジしようとしたときのヘッジエラーを解析する. したがって, 通常の意味のポートフォリオ戦略そのものではなく, いつポートフォリオを組み換えるかという離散化戦略が本稿の考察対象となる.

この問題は確率積分を Riemann 和によって近似した時の近似誤差の解析に帰着する. ここでポートフォリオ組替えの時刻が, 確率積分の Riemann 和への分割時刻に対応しており, 本稿ではこれを一般の停止時刻 ( stopping time ) 列として扱う. 分割が等間隔の場合は, 古く Rootzén (1980) によって近似誤差の収束率と漸近分布が導出された. ヘッジエラーの文脈でも Bertsimas, Kogan and Lo (2000), Hayashi and Mykland (2005) 等の研究がある. 最近 Tankov and Volchkova (2009) によって, ジャンプを許すモデルへも拡張された. 分割が等間隔でなくても, 確定的 ( determinisitic ) な時刻列ならば解析は比較的用意で, $L^p$ 誤差についても例えば Gebet and Temam (2001), Geiss (2005) などの研究がある. しかし実際上, ポートフォリオ組替え時刻があらかじめ確定的に定まっているのは不自然であるし, 効率的であるとも思えない. いつポートフォリオを組換えるかは, 現在持っている原資産の量, 現在持つべき原資産の量, 現在の株価などによって適合的 (戦略的) に判断されるべきものであるし, 現実にそのようにされているであろう. しかし具体的に組替え時刻をどのように決定するかは未解決な問題である. Martini and Patry (1999) は Black-Scholes モデルにおいてマルチンゲール測度の下での $L^2$ 誤差を最小にする分割 (停止時刻列) を動的計画法, 最適停止問題の枠組で解析した. そこでは最適な停止時刻列の存在と一意性は議論されているもの, 具体的な構成は数値解析を要するものである. 本稿では漸近論を導入することで, 陽に与えられる (漸近的) 最適戦略を構成する. 本稿で与えられる結果は Black-Scholes モデルに限定して考えても新しいものであり, 提案される離散ヘッジ戦略 (停止時刻列) は非常に簡明である. 離散ヘッジ戦略の最適性の規準として**漸近有効性**の概念を導入する. 離散ヘッジリスクの漸近的下界の存在を証明し, 実際にその下界を達成する離散ヘッジ戦略を漸近有効と呼ぶのである. 漸近有効な戦略 (停止時刻列) は, 持つべき原資産の量と現に持っている原資産の量との差に係る初到達時刻によって陽に構成されるので, 直感的にも自然であり, 実装も容易である. 取引費用の概念も自然に導入することが出来て, 取引費用の構造に応じた漸近有効離散ヘッジ戦略も陽に与えられる.

本稿で扱う問題と関連するいくつかの問題について, 東京大学 楠岡成雄教授, 高橋明彦教授, 吉田朋広教授には多くの示唆を頂いた. この場を借りて御礼申し上げたい. 本研究は科学研究費補助金 (若手研究 B), 統計数理研究所共同研究, 大阪大学基礎工学研究科未来ラボの助成を受けている.

[*] 大阪大学 金融・保険教育研究センター

## 2　問題設定

本稿では記述の複雑さを避けるため一貫して安全資産の金利を 0 とする. 通常の無裁定理論に則り, 原資産価格が連続セミマルチンゲール $Y$ によって表現され, かつある同値 (局所) マルチンゲール測度が存在して, その下で $Y$ は局所マルチンゲールであると仮定する. デリバティブ契約の満期に相当する時刻 $T$ を固定する. この $T$ は停止時刻でさえあれば, 確率的であっても構わないし, $T = \infty$ でもよい. 本稿では離散ヘッジリスクのみを扱うので, まずヘッジ戦略 $X$ が $[0, T]$ 上定義されていて,

$$X \cdot Y := \int_0^T X_s \mathrm{d}Y_s \tag{1}$$

が複製すべきペイオフであり, かつ

$$X^n \cdot Y := \int_0^T X^n_s \mathrm{d}Y_s = \sum_{j=0}^{\infty} X_{\tau^n_j}(Y_{\tau^n_{j+1}\wedge T} - Y_{\tau^n_j \wedge T}) \tag{2}$$

が実現出来るヘッジポートフォリオであると想定する. ここで $\tau^n_j$ は

$$0 = \tau^n_0 < \tau^n_1 < \cdots < \tau^n_j < \ldots, \quad \text{a.s.},$$

また任意の $\tau < T$ なる停止時刻 $\tau$ に対して

$$N^n_\tau := \max\{j \geq 0; \tau^n_j \leq \tau\} < \infty, \quad \text{a.s.} \tag{3}$$

を満たす停止時刻列であり, $X^n$ は

$$X^n_s = X_{\tau^n_j}, \quad s \in [\tau^n_j \wedge T, \tau^n_{j+1} \wedge T)$$

によって定義されるとする. 勿論 $\tau^n_j$ が $j$ 回目のポートフォリオ組替え時刻を指しており, $N^n_\tau$ は 時刻 $\tau$ までの組替え回数を表している.

問題はヘッジ戦略 $X$ が任意の時刻 $s \in [0, T]$ で計算出来たとしても, 実際のポートフォリオ組替えは離散的にしか行えないということである. 例えば Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパ型オプションペイオフ $f(Y_T)$ のヘッジ問題においては,

$$\mathrm{d}Y_t = \mu Y_t \mathrm{d}t + \sigma Y_t \mathrm{d}W_t, \quad X_t = \partial_y P_f(t, Y_t), \quad P_f(t, y) = \int f(y \exp(-\sigma^2(T-t)/2 + \sigma\sqrt{T-t}z))\phi(z)dz$$

とおけば (ここで $W$ は標準 Brown 運動, $\phi$ は標準正規密度関数)

$$f(Y_T) = P(0, Y_0) + \int_0^T X_s \mathrm{d}Y_s \tag{4}$$

が成立するのであった. つまりヘッジ戦略 $X$ は陽に与えられているのであるが, 現実的にポートフォリオ価値として実現出来るのは初期費用に (2) の Riemann 和を加えたものである. このときヘッジエラーの確率的な部分は

$$Z^n = X \cdot Y - X^n \cdot Y$$

で与えられる. 本稿の目的はこの $Z^n$ を評価し, 何らかの意味で最適な停止時刻列 $\tau^n_j$ を構成することである. 最も安直な戦略 (停止時刻列) は, 正定数 $h_n$ に対して

$$\tau^n_j = jh_n, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

つまり期間を等分割する方法である. 一方で

$$\tau^n_0 = 0, \quad \tau^n_{j+1} = \inf\{t > \tau^n_j; |X_t - X_{\tau^n_j}|^2 = h_n\}$$

のような戦略を考えることも出来る. このような無限にある候補の中から何らかの意味で最適なものを選びたいわけである.

ここで摂動パラメータ $n$ について説明する. この $n$ は漸近論のためのパラメータで, 後に $n \to \infty$ の極限を考えることになる. 問題の性質から, 組替えの間隔 $\tau^n_{j+1} - \tau^n_j$ は全体の期間 $[0, T]$ に比べて十分に小さいと考えられる. 例えば $T = 1$ (満期が一年後) として, 毎営業日一回程度ポートフォリオを組み換えるとすれば, $\tau^n_{j+1} - \tau^n_j \approx 1/250$ である. そこで $n \to \infty$ のとき $\tau^n_{j+1} - \tau^n_j \to 0$ となるような停止時刻列 $\tau^n = \{\tau^n_j\}_j$ の列 $\{\tau^n\}_n$ を考えれば, $Z^n$ に関する量は $n \to \infty$ の極限における対応量によって精度良く近似出来るであろう. 漸近論は問題に応じた適切な極限をとることで, 複雑な問題に対しても比較的簡明な解析解を与えることがしばしばあり, 今の我々の問題に対しては, この高頻度極限が美しい解を与える. 高頻度極限については次節以降でより厳密に記述する. 本稿ではこの停止時刻列 $\tau^n = \{\tau^n_j\}_j$ の列 $\{\tau^n\}_n$ を**離散ヘッジ戦略**と呼ぶ.

確率積分 $X \cdot Y$ の離散化として, 上記の Riemann 和を考えるのは最も単純で自然であろう. 一方で, ポートフォリオ戦略 $X$ の離散化を考える上で, 時刻 $\tau^n_j$ における保有量を必ずしも $X_{\tau^n_j}$ とする必要はない. しかし実は漸近不偏性の観点からこの自然な選択が最適であり, したがってこの Riemann 和のクラスの中で最適な離散ヘッジ戦略を探せば十分であることが示せるのだが, 議論が煩雑になるのを避けるためにここでは始めから単純な Riemann 和に限定して離散ヘッジ戦略を考察する.

以下, $G \cdot F$ と書くとき, それはもし $F$ がセミマルチンゲールならば, $G$ の $F$ に関する確率積分を表すものとし, もし $F$ が有界変動過程ならば, $G$ の $F$ に関する Stiltjes 積分を表すものとする. 勿論上記の $X \cdot Y$, $X^n \cdot Y$ もこの表記に従っている. 最後に用語を定義してこの節を閉じる.

**定義:** 適合過程 $\varphi$ が $[0, T)$ 上の局所有界過程であるとは, ある停止時刻列 $\sigma^m$ で, $\sigma^m < T$, $\sigma^m \to T$ a.s. を満たすものが存在して $\varphi_{\sigma^m \wedge \cdot}$ が有界過程となることを言う.

**定義:** 適合過程 $M$ が $[0, T)$ 上の局所マルチンゲールであるとは, ある停止時刻列 $\sigma^m$ で, $\sigma^m < T$, $\sigma^m \to T$ a.s. を満たすものが存在して $M_{\sigma^m \wedge \cdot}$ が有界マルチンゲールとなることを言う.

# 3 離散ヘッジリスクの規準

ヘッジエラーは $Z^n$ で定義されるので, この確率変数 (確率過程) に対するリスク (の規準) を定義したい. 満期 $T$ におけるヘッジエラーは $Z^n_T$ であるから, ひとつの自然な (最も安直な) 規準は

$$E[|Z^n_T|^2]$$

である. しかしこの $E$ をどの測度に関する期待値としてとるかは非自明な問題である. 離散ヘッジリスクに関する先行研究 (例えば Martini and Patry (1999)) や, 非完備モデルにおけるヘッジ戦略についての多くの先行研究においては, $E$ として同値 (局所) マルチンゲール測度に関する期待値が採用されてきた. そのとき $Z^n = (X - X^n) \cdot Y$ が局所マルチンゲールとなることに注意すれば, $\langle Z^n \rangle_T$ が可積分のとき

$$E[|Z^n_T|^2] = E[\langle Z^n \rangle_T]$$

が成立する. 二次変動 $\langle Z^n \rangle$ は $Z^n$ の変動の激しさを表しているから, それ自身離散ヘッジリスクの指標となり得る. そこで本稿では離散ヘッジリスクの規準として

$$E[\langle Z^n \rangle_T] \tag{5}$$

を導入する. ここで $E$ は必ずしも同値 (局所) マルチンゲール測度に関する期待値とは限らない. 勿論そのようにとって先行研究に従ってもよいのだが, 少し一般的な枠組で議論することにする. 実は後で見るように (5) で定義したリスクを漸近的に最小化する離散ヘッジ戦略は考えている同値測度に依存しないことがわかる.

さて (5) で採用する $E$ を任意に固定した上で, その測度の下, 以下の構造条件が満たされると仮定する:

**構造条件:** $Y$ は連続セミマルチンゲールで,

1. $[0, T)$ 上の連続局所マルチンゲール $M$,
2. $[0, T)$ 上の局所有界過程 $\psi$,
3. $[0, T]$ 上連続非負値で, $[0, T)$ 上有限正値な確率過程 $\kappa$

が存在して, $[0,T]$ 上

$$X = X_0 + \psi \cdot \langle M \rangle + M, \ \ \langle Y \rangle = \kappa^2 \cdot \langle X \rangle$$

が成立する.

この構造条件は, 例えば前述の Black-Scholes モデルにおいて非線型凸関数 $f$ をペイオフ関数としたときには

$$M = \Gamma \cdot Y, \ \ \kappa = \Gamma^{-1}, \ \ \Gamma_t = \partial_y^2 P_f(t, Y_t)$$

等として満たされている. デジタルオプションのペイオフなど凸関数でないものは $\kappa$ の局所有界性が満たされないのでこの枠組には乗らないが, 代替的な枠組で議論を進めることができる (詳細は割愛).

## 4 固定取引費用に係る漸近有効性

さて我々は (5) で定義したリスクを何らかの意味で最小化する停止時刻列を構成したいのだが, まず候補となる離散ヘッジ戦略のクラスを導入したい. 漸近論の対象となるクラスを構成し, そのクラスに対して漸近有効性の概念を定義する. このクラスは数学的に扱いやすい性質を持つクラスであって欲しいのだが, その扱いやすさの制約が同時にヘッジの観点からも望ましい制約になっていなければならない. 単に数学的な扱いやすさの観点から離散ヘッジ戦略の候補を制限して, その中から最適なものを選んでもあまり意味がないからである. 以下の 2 条件を満たす離散ヘッジ戦略 $\tau^n$ の全体を $\mathcal{T}$ と置こう:

**条件 1:** 任意の $\tau < T$ a.s. なる停止時刻 $\tau$ に対して確率収束の意味で, $n \to \infty$ のとき

$$\sup_{j \geq 0} |\tau^n_{j+1} \wedge \tau - \tau^n_j \wedge \tau| \to 0.$$

**条件 2:** ある増大停止時刻列 $\sigma^m$ で, $\sigma^m < T$, $\sigma^m \to T$, a.s., $(m \to \infty)$ なるものが存在して, 各 $m$ に対して

$$E[N^n_{\sigma^m}] \langle Z^n \rangle_{\sigma^m}$$

が $n$ について一様可積分となる.

条件 1 がすなわち高頻度極限の状況を表現している. 条件 2 は $\langle Z^n \rangle$ の強い可積分性を要請するものであるから, ヘッジの観点から望ましい性質である. 例えば $[0,T)$ 上の局所有界過程 $g$ で, $1/g$ も $[0,T)$ 上局所有界なものに対して $\mathrm{d}\langle X \rangle_t = g_t \mathrm{d}t$ が成立し, またある定数 $a$ と減少列 $h_n \to 0$ に対して

$$\sup_{j \geq 0} |\tau^n_{j+1} \wedge T - \tau^n_j \wedge T| \leq a h_n, \quad N^n_T \leq a/h_n, \ \ \text{a.s.}$$

が成立するなら, 条件 2 は満たされることが容易に確かめられる.

**定理:** 任意の $\tau^n \in \mathcal{T}$ と, $\tau \leq T$ a.s. なる任意の停止時刻 $\tau$ に対して

$$\liminf_{n \to \infty} E[N^n_\tau] E[\langle Z^n \rangle_\tau] \geq \frac{1}{6} E[\kappa \cdot \langle X \rangle_\tau]^2.$$

**証明:** ある増大停止時刻列 $\sigma^m < T$ , $\sigma^m \to T$, a.s.,$(m \to \infty)$ が存在して, 各 $m$ に対して $M_{\sigma^m \wedge \cdot}$ は $[0,\tau]$ 上の確率過程として有界マルチンゲール, かつ

$$Y_{\sigma^m \wedge \cdot}, \ \langle X \rangle_{\sigma^m \wedge \cdot}, \ \kappa_{\sigma^m \wedge \cdot}, \ \frac{1}{\kappa_{\sigma^m \wedge \cdot}}, \ \psi_{\sigma^m \wedge \cdot}$$

も $[0,\tau]$ 上の確率過程として有界となる. この $\sigma^m$ は条件 2 で存在が保証されるものと同一のものとみなしても一般性を失わない. 単調増大性より各 $m$ に対して

$$\liminf_{n \to \infty} E[N^n_{\sigma^m \wedge \tau}] E[\langle Z^n \rangle_{\sigma^m \wedge \tau}] \geq \frac{1}{6} E[\kappa \cdot \langle Y \rangle_{\sigma^m \wedge \tau}]^2$$

を示せば十分であることがわかる. したがって始めから $M$ が $[0,\tau]$ 上の有界マルチンゲール, かつ $Y, \langle X \rangle, \kappa, 1/\kappa, \psi$ が $[0,\tau]$ 上有界であり, $E[N^n_\tau] \langle Z^n \rangle_\tau$ が一様可積分であると仮定しても一般性を失わないので, 以下そのようにする. 各 $n$ に対して $[0,\tau]$ 上の有界確率過程 $\kappa^n$ と $\psi^n$ を

$$\kappa^n_s = \kappa_{\tau^n_j}, \ \ \psi^n_s = \psi_{\tau^n_j}, \ \ s \in [\tau^n_j \wedge \tau, \tau^n_{j+1} \wedge \tau)$$

で定義しよう. 伊藤の公式を適用して

$$\begin{aligned}\langle Z^n\rangle_t =& \int_0^t (X_s - X_s^n)^2 \mathrm{d}\langle Y\rangle_s \\ =& \int_0^t (X_s - X_s^n)^2 |\kappa_s^n|^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s + \int_0^t (X_s - X_s^n)^2 (\kappa_s^2 - |\kappa_s^n|^2) \mathrm{d}\langle X\rangle_s \\ =& \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_{\tau_j^n}^2 (X_{\tau_{j+1}^n\wedge t} - X_{\tau_j^n\wedge t})^4 - \frac{2}{3}\int_0^t |\kappa_s^n|^2 (X_s - X_s^n)^3 \mathrm{d}X_s + \int_0^t (X_s - X_s^n)^2 (\kappa_s^2 - |\kappa_s^n|^2) \mathrm{d}\langle X\rangle_s\end{aligned} \tag{6}$$

を得る. ここで

$$\lim_{n\to\infty} E\left[E[N_\tau^n]\int_0^\tau (X_s - X_s^n)^2 (\kappa_s^2 - |\kappa_s^n|^2)\mathrm{d}\langle X\rangle_s\right] = 0$$

が成立する. 実際

$$\epsilon^n = \sup_{0\le s\le \tau} |\kappa_s^2 - |\kappa_s^n|^2|, \quad V^n = E[N_\tau^n]\int_0^\tau (X_s - X_s^n)^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s$$

とおけば, $\kappa$, $1/\kappa$ の有界性より, $\epsilon^n$ は有界, $V^n$ は一様可積分で,

$$E[N_\tau^n]\int_0^\tau (X_s - X_s^n)^2 |\kappa_s^2 - |\kappa_s^n|^2| \mathrm{d}\langle X\rangle_s \le \epsilon^n V^n \to 0$$

が言える. ここで最後の収束は確率収束の意味であり, $\kappa$ の連続性と条件 1 を用いた. さらに $\epsilon^n$ が有界なので $\epsilon^n V^n$ も一様可積分となり $E[\epsilon^n V^n] \to 0$ が結論できる. 同様の議論で

$$E[N_\tau^n]E\left[\int_0^\tau |\kappa_s^n|^2 (X_s - X_s^n)^3 \mathrm{d}X_s\right] = E[N_\tau^n]E\left[\int_0^\tau |\kappa_s^n|^2 (X_s - X_s^n)^3 \psi_s \mathrm{d}\langle X\rangle_s\right] \to 0$$

も示せる (ここでは $\kappa$ の代わりに $X$ の連続性を用いる). ここまでで

$$\liminf_{n\to\infty} E[N_\tau^n]E[\langle Z^n\rangle_\tau] = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{6} E[N_\tau^n]E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_{\tau_j^n}^2 (X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^4\right]$$

が言えたことになる. 一方 Cauchy-Schwarz 不等式と Jensen の不等式により

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^2\right]^2 =& E\left[\sqrt{1+N_\tau^n}\frac{1}{\sqrt{1+N_\tau^n}}\sum_{j=0}^{N_\tau^n} \kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^2\right]^2 \\ \le& E[1+N_\tau^n]E\left[(1+N_\tau^n)\left\{\frac{1}{1+N_\tau^n}\sum_{j=0}^{N_\tau^n} \kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^2\right\}^2\right] \\ \le& E[1+N_\tau^n]E\left[\sum_{j=0}^{N_\tau^n} \kappa_{\tau_j^n}^2 (X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^4\right]\end{aligned}$$

が成立する. 勿論

$$0 < \frac{\tau}{N_\tau^n} \le \sup_{j\ge 0} |\tau_{j+1}^n \wedge \tau - \tau_j^n \wedge \tau| \to 0, \quad \liminf_{n\to\infty} E[N_\tau^n] \ge E[\liminf_{n\to\infty} N_\tau^n]$$

より $E[N_\tau^n] \to \infty$ だから, 以上を合わせて

$$\liminf_{n\to\infty} E[N_t^n]E[\langle Z^n\rangle_\tau] \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{6} E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^2\right]^2$$

を得る. 再び伊藤の公式を適用すると

$$\sum_{j=0}^{\infty} \kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau} - X_{\tau_j^n\wedge\tau})^2 - \kappa\cdot\langle X\rangle_\tau = 2\int_0^\tau \kappa_s^n (X_s - X_s^n)\mathrm{d}X_s - (\kappa - \kappa^n)\cdot\langle X\rangle_\tau$$

を得るので, 後は

$$E\left[\int_0^\tau \kappa_s^n(X_s - X_s^n)\psi_s \mathrm{d}\langle X\rangle_s\right] \to 0,\quad E[(\kappa - \kappa^n)\cdot\langle X\rangle_\tau] \to 0$$

を示せばよいが, これらは有界収束定理より明らかである. ////

上の定理は離散ヘッジリスクの収束率を決定し, かつ漸近リスクの下界を与えるものである. ポートフォリオ組替え回数の平均 $E[N_T^n]$ は, 取引費用 ( transaction cost ) を固定取引費用 ( fixed transaction cost ) としてモデリングしたときの平均的な損失であると解釈出来る. 組替え回数を増やせば増やすほどヘッジエラーは抑えられるが, その分固定取引費用が増加することになる. 固定取引費用を考慮に入れたヘッジエラーの平均分散最適化を考えることは, 上の定理で与えられるリスクの下界を達成する離散ヘッジ戦略を構成することに帰着する.

**定義:** 離散ヘッジ戦略 $\tau^n$ が $\mathcal{T}$ において漸近有効であるとは, ある停止時刻列 $\sigma^m$ で $\sigma^m < T$, $\sigma^m \to T$ a.s. なるものが存在して, 各 $m$ について

$$\lim_{n\to\infty} E[N_{\sigma^m}^n]E[\langle Z^n\rangle_{\sigma^m}] = \frac{1}{6}E[\kappa\cdot\langle X\rangle_{\sigma^m}]$$

が成立することである.

**定理:** 二次変動 $\langle Y\rangle$ が (狭義) 単調増加と仮定する. 以下で定義される離散ヘッジ戦略 $\tau^n = \{\tau_j^n\}$ を考える: 減少列 $h_n \to 0$ に対して

$$\tau_0^n = 0,\quad \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |X_t - X_{\tau_j^n}|^2 \geq h_n/\kappa_{\tau_j^n}\}.$$

このとき $\tau^n \in \mathcal{T}$ で, $\tau^n$ は $\mathcal{T}$ において漸近有効.

**証明:** まず $\tau^n \in \mathcal{T}$ を示すために, 停止時刻 $\tau < T$ を任意に固定する. ある停止時刻列 $\sigma^m$ で $\sigma^m < T$, $\sigma^m \to T$ a.s. なるものが存在して, 各 $m$ について $M_{\sigma^m\wedge\cdot}$ は $[0,\tau]$ 上の確率過程として有界マルチンゲール, かつ

$$Y_{\sigma^m\wedge\cdot},\ \langle X\rangle_{\sigma^m\wedge\cdot},\ \kappa_{\sigma^m\wedge\cdot},\ \frac{1}{\kappa_{\sigma^m\wedge\cdot}},\ \psi_{\sigma^m\wedge\cdot}$$

も $[0,\tau]$ 上の確率過程として有界となる. もし

$$\sup_{j\geq 0}|\tau_{j+1}^n\wedge\tau - \tau_j^n\wedge\tau| \to 0,\quad \text{a.s.}$$

でないとすると, $X$ が定数となるような空でない区間が確率 1 で存在し, $\langle Y\rangle$ の狭義単調増大性と矛盾する. また $\tau^n$ の定義と $1/\kappa$ の有界性より, ある定数 $a_m$ に対して

$$\sup_{t\geq 0, j\geq 0}|X_{\sigma^m\wedge\tau_{j+1}^n\wedge t} - X_{\sigma^m\wedge\tau_j^n\wedge t}|^2 \leq a_m h_n$$

となるから

$$\langle Z^n\rangle_{\sigma^m} = (X - X^n)^2\cdot\langle Y\rangle_{\sigma^m} \leq h_n a_m^2\langle X\rangle_{\sigma^m}, \tag{7}$$

また $\kappa$ の有界性より, ある定数 $a'_m$ が存在して

$$N_{\sigma^m}^n \leq a'_m h_n^{-1}\sum_{j=1}^{N_{\sigma^m}^n}(X_{\tau_j^n} - X_{\tau_{j-1}^n})^2 \leq a'_m h_n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\sigma^m} - X_{\tau_j^n\wedge\sigma^m})^2 \tag{8}$$

だから, ある定数 $a''_m$ が存在して

$$E[N_{\sigma^m}^n] \leq a_m h_n^{-1}(E[\langle X\rangle_{\sigma^m}] + a''_m). \tag{9}$$

条件 2 は (7) と (9) から従い, $\tau^n \in \mathcal{T}$ が言えた.

次に漸近有効性を示そう. 上記 (7) より $h_n^{-1}\langle Z^n\rangle_{\sigma^m}$ の一様可積分性, (8) より $h^n N_{\sigma^m}^n$ の一様可積分性が従うから後は

$$h_n^{-1}\langle Z^n\rangle_{\sigma^m} \to \frac{1}{6}\kappa\cdot\langle X\rangle_{\sigma^m},\quad h^n N_{\sigma^m}^n \to \kappa\cdot\langle X\rangle_{\sigma^m}$$

なる確率収束を示せば十分である. 前者は (6) と $\tau^n$ の定義を用いて

$$\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\infty}\kappa_{\tau_j^n}^2(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\sigma^m}-X_{\tau_j^n\wedge\sigma^m})^4 \approx h_n\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\infty}\kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\sigma^m}-X_{\tau_j^n\wedge\sigma^m})^2,$$

後者は

$$N_{\sigma^m}^n \approx h_n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\kappa_{\tau_j^n}(X_{\tau_{j+1}^n\wedge\sigma^m}-X_{\tau_j^n\wedge\sigma^m})^2$$

であることに気付けば結果は明らかである. ////

# 5　線形取引費用に係る漸近有効性

ここでは線形取引費用 ( linear transaction cost ) を含む, より一般的な取引費用の構造を想定して, 前節の結果を拡張する. 線形取引費用とは, 毎回の取引に際し取引額に比例した量の損失が発生する状況を想定したもので, ビッド・アスクスプレッドなどに起因する損失もこの線形取引費用で近似されると考えることが出来る. このとき時刻 $\tau$ までの総費用は

$$C^n(Y,1)_\tau = \sum_{j=0}^{\infty} Y_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau}|X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau}-X_{\tau_j^n\wedge\tau}|$$

に比例することになる. ここではより一般に時刻 $\tau$ までの総費用が, ある $[0,T]$ 上非負値連続で $[0,T)$ 上有限正値である確率過程 $\alpha$ と正定数 $\beta\in(0,2)$ によって

$$C^n(\alpha,\beta)_\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau}|X_{\tau_{j+1}^n\wedge\tau}-X_{\tau_j^n\wedge\tau}|^\beta$$

で与えられると仮定する.

以下の 2 条件を満たす離散ヘッジ戦略 $\tau^n$ の全体を $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$ と置こう:

**条件 1:** 任意の $\tau<T$ a.s. なる停止時刻 $\tau$ に対して確率収束の意味で, $n\to\infty$ のとき

$$\sup_{j\geq 0}|\tau_{j+1}^n\wedge\tau-\tau_j^n\wedge\tau|\to 0.$$

**条件 2′:** ある増大停止時刻列 $\sigma^m$ で, $\sigma^m<T$, $\sigma^m\to T$, a.s., $(m\to\infty)$ なるものが存在して, 各 $m$ に対して

$$E[C^n(\alpha,\beta)_{\sigma^m}]^{2/(2-\beta)}\langle Z^n\rangle_{\sigma^m}$$

が $n$ について一様可積分となる.

**定理:** 任意の $\tau^n\in\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$ と, $\tau\leq T$ a.s. なる任意の停止時刻 $\tau$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty} E[C^n(\alpha,\beta)_\tau]^{2/(2-\beta)}E[\langle Z^n\rangle_\tau] \geq \frac{1}{6}E[(\alpha^{2/(4-\beta)}\kappa^{2(2-\beta)/(4-\beta)})\cdot\langle X\rangle_\tau]^{(4-\beta)/(2-\beta)}.$$

**証明:** ある増大停止時刻列 $\sigma^m<T$ , $\sigma^m\to T$, a.s.,$(m\to\infty)$ が存在して, 各 $m$ に対して $M_{\sigma^m\wedge\cdot}$ は $[0,\tau]$ 上の確率過程として有界マルチンゲール, かつ

$$Y_{\sigma^m\wedge\cdot},\ \langle X\rangle_{\sigma^m\wedge\cdot},\ \kappa_{\sigma^m\wedge\cdot},\ \frac{1}{\kappa_{\sigma^m\wedge\cdot}},\ \psi_{\sigma^m\wedge\cdot}$$

も $[0,\tau]$ 上の確率過程として有界となる. この $\sigma^m$ は条件 2′ で存在が保証されるものと同一のものとみなしても一般性を失わない. 単調増大性より各 $m$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty} E[C^n(\alpha,\beta)_{\sigma^m}]^{2/(2-\beta)}E[\langle Z^n\rangle_{\sigma^m}] \geq \frac{1}{6}E[(\alpha^{2/(4-\beta)}\kappa^{2(2-\beta)/(4-\beta)})\cdot\langle X\rangle_{\sigma^m}]^{(4-\beta)/(2-\beta)}.$$

を示せば十分であることがわかる. したがって始めから $M$ が $[0,\tau]$ 上の有界マルチンゲール, かつ $Y, \langle X\rangle, \kappa, 1/\kappa, \psi$ が $[0,\tau]$ 上有界であり, $E[C^n(\alpha,\beta)_\tau]^{2/(2-\beta)}\langle Z^n\rangle_\tau$ が一様可積分であると仮定しても一般性を失わないので, 以下そのようにする.

$$\liminf_{n\to\infty} E[C^n(\alpha,\beta)_\tau]^{2/(2-\beta)}E[\langle Z^n\rangle_\tau] = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{6}E[C^n(\alpha,\beta)_\tau]^{2/(2-\beta)}E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^2_{\tau^n_j}(X_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}-X_{\tau^n_j\wedge\tau})^4\right]$$

を示すまでは前と同様である. ここで Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{2/(4-\beta)}_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}\kappa^{2(2-\beta)/(4-\beta)}_{\tau^n_j}(X_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}-X_{\tau^n_j\wedge\tau})^2\right] \\ &\le E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^2_{\tau^n_j}(X_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}-X_{\tau^n_j\wedge\tau})^4\right]^{1/p} E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{2q/(4-\beta)}_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}|X_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}-X_{\tau^n_j\wedge\tau}|^{q(2-4/p)}\right]^{1/q} \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^2_{\tau^n_j}(X_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}-X_{\tau^n_j\wedge\tau})^4\right]^{(2-\beta)/(4-\beta)} E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}|X_{\tau^n_{j+1}\wedge\tau}-X_{\tau^n_j\wedge\tau}|^{\beta}\right]^{2/(4-\beta)} \end{aligned}$$

となる. ここで $p=(4-\beta)/(2-\beta)$, $q=p/(p-1)=(4-\beta)/2$ である. 残りは前と同様である. ////

**定義:** 離散ヘッジ戦略 $\tau^n$ が $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ において漸近有効であるとは, ある停止時刻列 $\sigma^m$ で $\sigma^m < T$, $\sigma^m \to T$ a.s. なるものが存在して, 各 $m$ について

$$\lim_{n\to\infty} E[C^n(\alpha,\beta)_{\sigma^m}]^{2/(2-\beta)}E[\langle Z^n\rangle_{\sigma^m}] = \frac{1}{6}E[(\alpha^{2/(4-\beta)}\kappa^{2(2-\beta)/(4-\beta)})\cdot\langle X\rangle_{\sigma^m}]^{(4-\beta)/(2-\beta)}.$$

が成立することである.

**定理:** 二次変動 $\langle Y\rangle$ が (狭義) 単調増加と仮定する. 以下で定義される離散ヘッジ戦略 $\tau^n=\{\tau^n_j\}$ を考える: 減少列 $h_n\to 0$ に対して

$$\tau^n_0=0,\quad \tau^n_{j+1}=\inf\{t>\tau^n_j; |X_t-X_{\tau^n_j}|^2 \ge h_n\alpha^{2/(4-\beta)}_{\tau^n_j}\kappa^{-4/(4-\beta)}_{\tau^n_j}\}.$$

このとき $\tau^n\in\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ で, $\tau^n$ は $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ において漸近有効.

**証明:** 前と同様なので省略する. ////

# 6 Black-Scholes モデル

最後に前節までの結果を Black-Scholes モデルにおいて見直し, 数値実験結果も紹介する. ヨーロッパ型オプションペイオフ $f(Y_T)$ のヘッジ問題において,

$$\mathrm{d}Y_t=\mu Y_t\mathrm{d}t+\sigma Y_t\mathrm{d}W_t,\quad X_t=\partial_y P_f(t,Y_t),\quad P_f(t,y)=\int f(y\exp(-\sigma^2(T-t)/2+\sigma\sqrt{T-t}z))\phi(z)dz$$

とおけば (ここで $W$ は標準 Brown 運動, $\phi$ は標準正規密度関数), $X$ はいわゆるデルタヘッジ戦略と呼ばれるもので, ペイオフ関数 $f$ が 非線型凸関数のときには

$$M=\Gamma\cdot Y,\quad \kappa=\Gamma^{-1},\quad \Gamma_t=\partial_y^2P_f(t,Y_t)$$

なる対応によって本稿の結果が適用される. とくに $\Gamma$ はいわゆるガンマであることに注意しよう.

第 4 節ではポートフォリオ組替えの平均回数 $E[N^n_T]$ に係る漸近有効離散ヘッジ戦略として

$$\tau^n_0=0,\quad \tau^n_{j+1}=\inf\{t>\tau^n_j; |X_t-X_{\tau^n_j}|^2\ge h_n\Gamma_{\tau^n_j}\}$$

が与えられた. これは漸近的には

$$\tau^n_0=0,\quad \tau^n_{j+1}=\inf\{t>\tau^n_j; |Y_t-Y_{\tau^n_j}|^2\ge h_n/\Gamma_{\tau^n_j}\}$$

なる戦略と同等である. Black-Scholes モデルのデルタヘッジにおいては, 漸近有効離散ヘッジ戦略は唯ガンマを計算するだけで構成できることになる.

この事情は線形費用を想定しても同様である. 第 5 節の結果から平均線形費用 $E[C^n(Y,1)_T]$ に係る漸近有効離散ヘッジ戦略は

$$\tau_0^n = 0, \ \ \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |X_t - X_{\tau_j^n}|^3 \geq h_n Y_{\tau_j^n} \Gamma_{\tau_j^n}^2\}$$

で与えられ, これは漸近的には

$$\tau_0^n = 0, \ \ \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |Y_t - Y_{\tau_j^n}|^3 \geq h_n Y_{\tau_j^n} / \Gamma_{\tau_j^n}\}$$

と同等である. いずれの戦略もまず $\tau_j^n$ において $\Gamma$ の値を計算しておき, デルタの値 $X$ または原資産価格 $Y$ がその $\Gamma$ の値によって決まる閾値を越えた時点を, 次の組替え時刻 $\tau_{j+1}^n$ とするのである.

この Black-Scholes モデルで $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $T = 1.0$, $Y_0 = 100$ としてコールオプション (行使価格 $K = 80, 90, 100, 110, 120$) をヘッジするシミュレーションを行った. 次ページの $\Delta^2/\Gamma$, Karandikar, equisitant はそれぞれ

$$\tau_0^n = 0, \ \ \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |X_t - X_{\tau_j^n}|^2 \geq 0.05 \Gamma_{\tau_j^n}\},$$

$$\tau_0^n = 0, \ \ \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |X_t - X_{\tau_j^n}| \geq 0.03\},$$

$$\tau_j^n = j/200$$

による離散化の結果を表している. 表は $Z_T^n$, $N_T^n$, $\sqrt{N_T^n} Z_T^n$ についてそれぞれ平均, 分散, 絶対値の最大値を記載している. ここで我々が注目すべきは $E[N_T^n]$ と $\mathrm{Var}[Z_T^n]$ であり, 我々の漸近有効戦略 $\Delta^2/\Gamma$ が equidistant を 3 倍程度優越し, かつ Karandikar よりも優越していることが見て取れるだろう.

その次のページの表は同様の設定で

$$\tau_0^n = 0, \ \ \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |X_t - X_{\tau_j^n}|^2 \geq 0.05 \Gamma_{\tau_j^n}\},$$

と ($\Delta^2/\Gamma$ の欄)

$$\tau_0^n = 0, \ \ \tau_{j+1}^n = \inf\{t > \tau_j^n; |Y_t - Y_{\tau_j^n}|^3 \geq 0.001 Y_{\tau_j^n} / \Gamma_{\tau_j^n}\}$$

を ($\Gamma^{1/3}$ の欄) を比べたものである. 理論的な結果と整合的に, それぞれ最小化すべきものを最小化している様子が見て取れる.

本稿は漸近論により, 離散ヘッジ戦略の最適性を扱ったのであるが, 一般に漸近論は $n$ がどの程度大きければ漸近近似が有効となるかを答えることができない. しかし以上の数値実験結果は漸近有効性による戦略が $N_T^n \approx 200$ 程度の現実的な設定においても十分よい性質を持つことを示唆するものである.

## 参考文献


[1] Rootzén, H. (1980): Limit distributions for the error in approximations of stochastic integrals, *Ann. Probab.* 8, no.2, 241-251

[2] Bertsimas, D.; Kogan, L.; Lo, A.W. (2000): When is time continuous? *Journal of Financial Economics* 55, no.2, 173-204

[3] Hayashi, T.; Mykland, P.A. (2005): Evaluating Hedging Errors: An Asymptotic Approach, *Math. Finance* 15, no.2, 309-343

[4] Takov, P.;Voltchkova, E. (2009): Asymptotic analysis of hedging errors in models with jumps, *Stoch. Proc. Appl.* 119, 2004-2027

[5] Gobet, E.; Temam, E. (2001): Discrete time hedging errors for options with irregular payoffs, *Finance Stoch.* 5, no.3, 357-367

[6] Geiss, S. (2005) : Weighted BMO and discrete time hedging within the Black-Scholes model, *Prob. Theory Related Fields* 132, 13-38

[7] Martini, C.; Patry, C. (1999): Variance Optimal Hedging in the Black-Scholes model for a given Number of Transactions, *INRIA Rapport de recherche* no.3767

| | $K = 80$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | Karandikar | | | equidistant | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ |
| mean | -0.01537352 | 141.4105 | -0.1446458 | -0.03280404 | 155.6421 | -0.03062151 | -0.005157059 | 200 | -0.07293182 |
| var | 0.06691764 | 6321.528 | 11.83746 | 0.1365029 | 32408.68 | 18.45742 | 0.2344408 | 0 | 46.88816 |
| max(abs) | 1.424958 | 372 | 24.7348 | 1.416327 | 1091 | 24.5949 | 3.337689 | 200 | 47.20205 |

| | $K = 90$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | Karandikar | | | equidistant | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ |
| mean | -0.00540009 | 197.2496 | -0.07438662 | -0.01832963 | 221.7398 | 0.001935751 | -0.0007711854 | 200 | -0.01090621 |
| var | 0.0926668 | 6974.86 | 21.30167 | 0.1491962 | 37281.19 | 30.12977 | 0.4044243 | 0 | 80.88486 |
| max(abs) | 1.37445 | 423 | 26.80940 | 1.636774 | 1094 | 31.49911 | 6.638782 | 200 | 93.88656 |

| | $K = 100$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | Karandikar | | | equidistant | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ |
| mean | -0.002961001 | 233.4127 | -0.05524445 | -0.01633555 | 256.3147 | -0.005860131 | -0.00118349 | 200 | -0.01673708 |
| var | 0.1025476 | 7587.587 | 26.76357 | 0.1890027 | 36544.54 | 41.05743 | 0.5435164 | 0 | 108.7033 |
| max(abs) | 1.900527 | 456 | 35.45387 | 4.096964 | 1108 | 33.54726 | 4.552547 | 200 | 64.38274 |

| | $K = 110$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | Karandikar | | | equidistant | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ |
| mean | 0.002361385 | 245.5528 | -0.007670405 | -0.01230891 | 259.0782 | -0.07253843 | 0.004596686 | 200 | 0.06500695 |
| var | 0.1140284 | 10027.26 | 32.4433 | 0.20692 | 38408.00 | 46.65769 | 0.6204481 | 0 | 124.0896 |
| max(abs) | 1.705148 | 505 | 33.46064 | 4.511412 | 1144 | 40.25247 | 5.551132 | 200 | 78.50486 |

| | $K = 120$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | Karandikar | | | equidistant | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ |
| mean | 0.007486189 | 235.5804 | 0.04973107 | 0.01947893 | 231.4467 | 0.2546105 | 0.004175661 | 200 | 0.05905276 |
| var | 0.1088406 | 13293.20 | 31.48653 | 0.1741112 | 36475.09 | 41.04965 | 0.6482734 | 0 | 129.6547 |
| max(abs) | 1.581899 | 521 | 32.09073 | 2.941053 | 1094 | 34.61855 | 5.470195 | 200 | 77.36024 |

```
init_genrand(5490UL);
```

$E[S_T] \sim 110.85742741$ (10000 times repetition). Hedging for the Black-Scholes model: $S_0 = 100, r = 0, \mu = 0.1, \sigma = 0.3, T = 1.0, \epsilon^2 = 0.05$ for $\Delta^2/\Gamma$, $\epsilon = 0.03$ for Karandikar, $\delta = 0.001$.

| | $K = 80$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | | | $\Gamma^{1/3}$ | | | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ |
| mean | -0.01495425 | 141.0802 | -0.1411094 | 362.7885 | -1.914039 | -0.00495398 | 149.3115 | -0.08736748 | 355.1337 | -2.173089 |
| var | 0.06712737 | 6233.555 | 11.91385 | 77358.42 | 21950.07 | 0.06242874 | 4019.445 | 11.97261 | 60333.43 | 21341.42 |
| max(abs) | 1.424958 | 372 | 25.95768 | 1509.612 | 1787.202 | 1.390982 | 305 | 21.14110 | 1204.555 | 1179.997 |

| | $K = 90$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | | | $\Gamma^{1/3}$ | | | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ |
| mean | -0.007682966 | 197.2755 | -0.1093786 | 565.0184 | -2.380408 | -0.002817737 | 191.5655 | -0.08901685 | 535.2129 | -3.439898 |
| var | 0.09253917 | 6976.071 | 21.16744 | 110634.9 | 54749.1 | 0.0955724 | 3844.381 | 21.42668 | 79560.53 | 53097.28 |
| max(abs) | 1.415714 | 424 | 26.80940 | 1833.372 | 2137.049 | 1.621772 | 337 | 25.79586 | 1547.417 | 1829.295 |

| | $K = 100$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | | | $\Gamma^{1/3}$ | | | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ |
| mean | -0.003256839 | 234.1748 | -0.06728299 | 718.1444 | -0.5518048 | 0.002264584 | 216.5197 | -0.02367044 | 665.1727 | -0.2085577 |
| var | 0.1040109 | 7674.445 | 27.26885 | 143164.4 | 87425.4 | 0.1159080 | 3810.821 | 28.26305 | 97869.82 | 86880.74 |
| max(abs) | 1.900527 | 456 | 35.45387 | 2052.015 | 2210.713 | 1.768899 | 365 | 30.07128 | 1666.612 | 2400.732 |

| | $K = 110$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | | | $\Gamma^{1/3}$ | | | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ |
| mean | 0.001796029 | 246.3084 | -0.01766375 | 789.0777 | 0.292795 | 0.001146476 | 222.8094 | -0.05127507 | 720.4367 | -3.060219 |
| var | 0.1122326 | 10124.47 | 31.90900 | 203398.1 | 125203.8 | 0.1262653 | 4816.055 | 32.46346 | 136349.4 | 121536.6 |
| max(abs) | 1.705148 | 507 | 33.46064 | 2385.615 | 2996.574 | 1.875787 | 394 | 36.37286 | 2018.079 | 3179.651 |

| | $K = 120$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta^2/\Gamma$ | | | | | $\Gamma^{1/3}$ | | | | |
| | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ | $Z_T$ | $N_T$ | $\sqrt{N_T}Z_T$ | $C_T$ | $C_T Z_T$ |
| mean | 0.005774647 | 235.8964 | 0.02756885 | 771.8449 | 1.344479 | 0.004254926 | 213.0668 | 0.005594997 | 698.3137 | 0.613111 |
| var | 0.1086991 | 13467.68 | 31.55866 | 269941.1 | 139934.7 | 0.1234432 | 6442.358 | 32.11409 | 180479.9 | 134461.2 |
| max(abs) | 1.845628 | 541 | 35.74043 | 2648.874 | 3009.004 | 1.97017 | 404 | 37.63954 | 2100.494 | 3461.886 |

```
init_genrand(5490UL);
```

20000 times repetition. $E[S_T] \sim 110.610049003$. Hedging for the Black-Scholes model: $S_0 = 100, r = 0, \mu = 0.1, \sigma = 0.3, T = 1.0, \epsilon^2 = 0.05$ for $\Delta^2/\Gamma, \epsilon^3 = 0.001$ for $\Gamma^{1/3}, \delta = 0.001$.