Discussion Paper Series 2008-01

Center for the Study of Finance and Insurance, Osaka University

高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおける ダブルバリア・オプションの評価について

室井芳史

January 31, 2008

高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおける ダブルバリア・オプションの評価について

室井芳史*

概要: 近年の金融取引の高度化により, ノックアウト・オプションをはじめとして, アジアン・オプション, ルックバック・オプションなど多くの経路依存型オプションが取引されている. ダブルノックアウト・オプションは相対取引でよく見られる形態のオプションであり, この種の商品の価格評価問題は長らく研究の対象となってきた. 本稿では, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおいて特異摂動展開法を用いた, ダブルノックアウト・オプションやアップイン・ダウンアウト・オプションなどのダブルバリア・オプションの価格評価について考察を行う.

キーワード: ダブルノックアウト・オプション, アップイン・ダウンアウト・オプション, 確率ボラティリティ・モデル, 境界値問題, 特異摂動展開法.

1 はじめに

本稿では, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデル (Fast Mean Reverting Stochastic Volatility Models) において, 上下両側にノックアウトまたはノックイン境界を持つオプションの価格評価を行う. 原資産過程を幾何ブラウン運動とする枠組みにおいて, 片側にのみノックアウト境界を持つオプションの価格評価は数理ファイナンスの黎明期より研究が始められ, 1970 年代初頭には Merton [1973] により価格式が求められている. 一方, 上下両側にノックアウト境界を持つオプションの価格式の導出はそれより大分遅く,1990 年代初頭になり Kunitomo=Ikeda [1992] が上下が指数関数型の境界 (curved boundaries) をもつオプションの価格式が導出している. Kunitomo=Ikeda [1992] では, Anderson [1960] による逐次検定の研究結果を基に, 上下両側にノックアウト境界を持つオプションの価格式は正規分布の分布関数の無限加重和で表現されることが導かれた. この結果は, ダブルノックアウト・オプション以外の経路依存型商品の価格式の導出にも用いられている. 詳細は池田 [2000] や Luo [2001] を見るとよい. また, 近年ノックアウト境界を持ったルックバック・オプションの価格が Muroi [2006] で計算されたが, これらの商品も基本的にはダブルノックアウト・オプションの導出と同様の考え方を用いて計算されている. 本稿では, ノックアウト・オプション価格の偏微分方程式を用いた定式化を軸として議論が進めら

*e-mail:muroi@sigmath.es-u.ac.jp,
560-8531 大阪府豊中市待兼山 1-3 大阪大学金融・保険教育研究センター大阪証券取引所寄附研究部門.

れるが, バリア・オプションの偏微分方程式による定式化は Wilmott, Howison=Dewynne [1995] が詳しい.

ボラティリティの変動を取り込んだモデルにおける金融派生商品の評価は, 数理ファイナンスにおける重要な問題のひとつと数えられる. この分野の古典的な研究は Hull=White [1987] を挙げられるが, 近年, 確率ボラティリティ・モデルにおける経路依存型オプション価格の評価問題などに特異摂動法の使用が提案され, さまざまな応用が試みられるようになった. これらの話題については Fouque, Papanicolaou=Sircar [1999, 2000] を参照のこと. 特異摂動展開法を用いた確率ボラティリティ・モデルにおける経路依存型商品の評価問題としては, Fouque=Han [2003] がアジアン・オプションを Ilhan, Jonsson=Sircar [2004] ノックアウト・オプションやルックバック・オプション, パスポート・オプションについて適用を行っている. また, 最近になり Wong=Chan [2007] が Fouque, Papanicolaou, Sircar=Solna [2003b] によって導入された多重スケール型確率ボラティリティ・モデルにおけるルックバック・オプション価格を導出している. このようにさまざまな経路依存型デリバティブで確率ボラティリティの効果が検証されているが, ダブルバリア・オプションにおいては考察が行われていないようである. そこで, 本稿では高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるダブルバリア・オプションの価格評価について考察を行う.

本稿の構成は以下のようである。第 2 章ではブラック・ショールズ・モデルにおけるダブルノックアウト・オプションとアップイン・ダウンアウト・オプションの価格式の評価法の概観について概観する. 続く第 3 章では, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるダブルバリア・オプションの評価問題について考察を行う. また, インプライド・ボラティリティを確率ボラティリティに組み込む方法についても議論を行っている. 第 4 章ではダブルノックアウト・オプションとアップインダウンアウト・オプションの二つの具体的なダブルバリア・オプションについて価格公式を求める. 第 5 章では数値計算結果について議論を行い, 最終章となる第 6 章で結論を述べる.

2　ダブルバリア・オプションの価格評価について

本章では, ブラック・ショールズ・モデルにおけるダブルバリア・オプションの評価問題について考察を行う. まずはじめに, ダブルノックアウト・オプションの価格評価について考察し、続いてアップ・イン・ダウン・アウト・オプションについて考察を行う.

2.1　ダブルノックアウト・オプション

まず、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を与える. 確率測度 P はモデルを規定する確率測度である. 本モデルでは安全資産と, デリバティブの原資産となる (株式などの) 危険資産二つの証券が取引されているものとする. 安全資産は預金と等価であり, 短期利回りは正数 r とする. 本章においては, 危険資産の価格は確率微分方程式

$$dS_t = \mu S_t dt + \bar{\sigma} S_t dW_t,\ S_0 = x$$

を満たすものとする. 変数 μ は正の定数とする. 次章では, このモデルを拡張しボラティリティは確率的に変動するモデルを導入するが, ここではボラティリティ σ は正の定数とする. 確率過程 $\{W_\cdot\}$ は1次元 P-ブラウン運動とする. このモデルはブラック・ショールズ・モデルと呼ばれる. このモデルにおいて派生商品の価格を決定するにはリスク中立確率測度 Q を決めないといけないが, 数理ファイナンスの一般論で知られているようにブラック・ショールズにおけるリスク中立確率測度 Q はラドン・ニコディム微分を用いて

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(-\frac{\mu - r}{\bar{\sigma}}W_t - \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\bar{\sigma}})^2 t)$$

と表記される. この確率測度 Q において危険資産の価格過程は

$$dS_t = rS_t dt + \bar{\sigma} S_t dW_t^\star,\ S_0 = x \tag{2.1}$$

と書くことができる. ただし, $W_t^\star$ は1次元標準 Q-ブラウン運動であり, P-ブラウン運動 W_t とは $W_t^\star = W_t + \frac{\mu - r}{\bar{\sigma}}t$ という関係を持っている.

上下にノックアウト境界 m と $l(< m)$ を持ち満期が T で行使価格が K のダブルノックアウト・オプションとは, 危険資産価格が満期 T までにノックアウト境界 l および m に達することがないときに限り, 満期 T に支払い $(S_T - K)^+$ を持つ金融派生商品である. 本稿では $K \in [l, m]$ という仮定を入れておく. もし, 危険資産価格が上下のノックアウト境界に達するとその商品は価値を失う. ここで紹介されたような, 水平なノックアウト境界を持つダブルノックアウト・オプションは, Kunitomo=Ikeda [1992] 研究されたダブルノックアウト・オプションの特殊例となっている.

いま, 二つの停止時刻 τ_1 と τ_2 を

$$\tau_1 = \inf\{t > 0 | S_t = l\}, \quad \tau_2 = \inf\{t > 0 | S_t = m\}$$

によって定義する. ダブルノックアウト・オプションの価格は次の条件付期待値

$$P_0(t, x) = E^Q[e^{-r\tau}(S_T - K)^+ 1_{\{\tau_1 > T, \tau_2 > T\}} | S_t = x]$$

を用いて評価することができる. ただし $\tau = T - t$ である. この条件付期待値は次の偏微分方程式

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_0(t, x) = 0 \\ P_0(t, l) = 0,\ P_0(t, m) = 0,\ P_0(T, x) = (x - K)^+ \end{gathered} \tag{2.2}$$

の解として与えられる. ただし、作用素 $\mathcal{L}_{BS}(\cdot)$ はブラックショールズの生成作用素であり,

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r(x\frac{\partial}{\partial x} - \cdot)$$

で与えられる. 本稿では, 直接偏微分方程式を解くことで価格を求めることはしないが, この微分方程式自体は後で用いる. ここでは, Kunitomo=Ikeda [1992] に倣い確率論的な手法を用いて価格を計算する.

補題 2.1 いま, 危険資産過程が $l < \inf_{0\le u\le T} S_u \le \sup_{0\le u\le T} S_u < m$ を満たしているものとする. この条件の下で満期 T において危険資産価格が I に含まれている確率は

$$P_I = \int_I \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (k(\alpha_n, y) - k(\beta_n, y)) \frac{dy}{y}$$

で評価される. ここで,$k_n(c; y)$ は

$$k_n(c; y) = c^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}-1} n[\log(y); \log(c^2 x) + (r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2})T, \bar{\sigma}\sqrt{T}]$$

で定義され, $n(y; c_1, c_2)$ は平均 c_1 分散 c_2 の正規分布の密度関数とする. また, 定数 $\{\alpha_n\}_n$ および $\{\beta_n\}_n$ は

$$\alpha_n = \frac{m^n}{l^n}, \beta_n = \frac{l^{n+1}}{xm^n}$$

で定義される.

この補題によりダブルノックアウト・オプションの理論価格を求めることができる. 次の定理は Kunitomo=Ikeda [1992] の特殊例となっている.

定理 2.1 *(Kunitomo=Ikeda[1992])* 行使価格 K 満期 T のダブルノックアウト・オプションの価格は

$$P_0(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [L(\alpha_n; K, m) - L(\beta_n; K, m)]$$

で与えられる. ただし, 関数 $L(c; p, q)$ は

$$\begin{aligned}
L(c; p, q) &= \int_p^q (y - K) c^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}-1} n(\log(y), \log(xc^2) + (r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2})\tau, \bar{\sigma}\sqrt{\tau}) dy \\
&= xc^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}+1} \{N(\frac{\log(\frac{xc^2}{p}) + (r + \bar{\sigma}^2/2)\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}) - N(\frac{\log(\frac{xc^2}{q}) + (r + \bar{\sigma}^2/2)\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})\} \\
&- Ke^{-r\tau} c^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}-1} \{N(\frac{\log(\frac{xc^2}{p}) + (r - \bar{\sigma}^2/2)\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}) - N(\frac{\log(\frac{xc^2}{q}) + (r - \bar{\sigma}^2/2)\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})\}
\end{aligned}$$

で与えられる. ここで $N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数であり, 変数 τ は $\tau = T - t$ で与えられる.

2.2 アップイン・ダウンアウト・オプション

本章では、アップイン・ダウンアウト・オプションの評価について考察を行う. アップイン・ダウンアウト・オプションは危険資産価格過程が上側境界 m に達する前に下側境界 l を下回ると価値を失い, 下側境界 l に達する前に上側境界 m を上回る場合には (ヨーロピアン) オプションの価値を持つ商品である. すなわち, この商品は満期までに, 危険資産価格が下側境界 l に達する前に上側境界 m に達する場合にのみ, 満期 T において $(S_T - K)^+$ が発生する商品である. このようなオプションの価格は次の条件付期待値

$$P_0(t, x) = E^Q[e^{-r(\tau_2 - t)} C_{BS}(\tau_2, m) 1_{\{\tau_2 < \tau_1, \tau_2 \le T\}} | S_t = x] \tag{2.3}$$

を用いて表現することができる. ここで, 関数 $C_{BS}(t,x)$ はヨーロッピアン・コール・オプションの価格式であり, 偏微分方程式

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})C_{BS}(t,x)=0,\ C_{BS}(T,x)=(x-K)^+$$

の解である. この解はブラック・ショールズ式として知られており,

$$C_{BS}(t,x)=xN(d)-Ke^{-r\tau}N(d-\bar{\sigma}\sqrt{\tau})$$

と表現され, 時刻 t において満期 T, 行使価格 K のオプションの理論価格を表している. ここで, 定数 d は

$$d=\frac{\log\left(\frac{x}{K}\right)+(r+\bar{\sigma}^2/2)\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}\ and\ \tau=T-t$$

である. 条件付期待値 (2.3) は境界値問題

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0(t,x)=0\\ P_0(t,l)=0,\ P_0(t,m)=C_{BS}(t,m),\ P_0(T,x)=0\end{gathered}\tag{2.4}$$

の解である. ダブルノックアウト・オプションの価格式を導出したときと同様に, アップイン・ダウンアウト・オプションの価格式の導出には偏微分方程式を用いずに, 確率論を用いた計算を行う. 条件付期待値を直接計算すると

$$\begin{aligned}P_0(t,x)&=E^Q[e^{-r(\tau_2-t)}C_{BS}(\tau_2,m)1_{\{\tau_2<\tau_1,\tau_2\le T\}}|S_t=x]\\ &=E^Q[e^{-r(\tau_2-t)}E^Q[e^{-r(T-\tau_2)}(S_T-K)^+|\mathcal{F}_{\tau_2}]1_{\{\tau_2<\tau_1,\tau_2\le T\}}|S_t=x]\\ &=E^Q[e^{-r\tau}(S_T-K)^+1_{\{\tau_2<\tau_1,\tau_2\le T\}}|S_t=x]\end{aligned}$$

となり, アップイン・ダウンアウト・オプションの価格式が導かれる.

補題 2.2 区間 I は区間 $[l,m]$ に含まれるものとする. *(2.1)* で表現される幾何ブラウン運動 $S(\cdot)$ が $\tau_2<\tau_1$, $\tau_2\le T$ かつ $S(T)\in I$ を満たす確率は

$$P_I=-\int_I\sum_{n=1}^{\infty}(k(\alpha_n,y)-k(\beta_{-n},y))\frac{dy}{y}$$

で与えられる. また、区間 I が区間 $[m,\infty]$ に含まれた場合, 同じく $\tau_2<\tau_1$, $\tau_2\le T$ かつ $S(T)\in I$ を満たす確率は

$$P_I=\int_I\sum_{n=0}^{\infty}(k(\alpha_{-n},y)-k(\beta_n,y))\frac{dy}{y}$$

である.

この補題を用いると, アップイン・ダウンアウト・オプションの価格公式を求めることができる. 価格式は次の定理で与えられる.

定理 2.2 時刻 t において危険資産価格が x であったとする．危険資産価格は幾何ブラウン運動にしたがっているものと仮定する．行使価格 K, 満期 T のアップイン・ダウンアウト・オプションの価格は

$$P_0(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty}[L(\alpha_n;K,m) - L(\beta_{-n};K,m)] + \sum_{n=0}^{\infty}[L(\alpha_{-n};m,\infty) - L(\beta_n;m,\infty)]$$

で与えられる．

注 2.1 関数 $L(c;p,q) = \lim_{q\to\infty} L(c;p,q)$, は

$$\begin{aligned} L(c,p,\infty) &= \int_p^{\infty}(y-K)c^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}-1}n(\log(y),\log(xc^2)+(r-\frac{\bar{\sigma}^2}{2})\tau,\bar{\sigma}\sqrt{\tau}) \\ &= xc^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}N(\frac{\log(\frac{xc^2}{p})+(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - Ke^{-r\tau}c^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(\frac{\log(\frac{xc^2}{p})+(r-\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) \end{aligned}$$

と計算される．

3 特異摂動展開法

本章では, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるダブルバリア・オプションの価格評価法を前半で考察し, インプライド・ボラティリティとオプション価格との関係について後半で議論する．高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおける (ダウン・アンド・アウト) ノックアウト・オプションの価格評価は Fouque, Papanicolaou=Sircar [1999, 2000] や Ilhan, Jonsson=Sircar [2004] などで研究されてきたが, ダブル・バリアを持つ派生商品の価格評価は研究されてこなかったようである．そこで, 特異摂動展開法を用いた確率ボラティリティ・モデルにおけるダブルバリア・オプションの価格評価を行ってみることにした．

3.1 ダブルバリア・オプション価格の確率ボラティリティ・モデルの効果

危険資産価格を $X^{\epsilon}_{\cdot}$ と書き, 次の確率微分方程式

$$\begin{aligned} dX_t^{\epsilon} &= \mu X_t^{\epsilon}dt + \sigma_t X_t^{\epsilon}dW_t \\ \sigma_t &= f(Y_t^{\epsilon}) \\ dY_t^{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon}(\bar{m} - Y_t^{\epsilon})dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t) \end{aligned}$$

に従って価格が変動しているとする．ここで, 係数 ρ は危険資産およびボラティリティを駆動する二つの標準ブラウン運動 $W_{\cdot}$ と $Z_{\cdot}$ の相関係数とする．確率過程 $Y_{\cdot}$ は危険資産のボラティリティの水準を決定する確率過程である．数理ファイナンスでは, 通常裁定取引機会が存在しないという仮定の下で議論が行われるが, このようなモデルでオプションの

価格を計算するにはリスク中立確率測度を決定しないといけない．ところが, 今回のモデルでは取引可能な資産ではないボラティリティが確率的に変動している．よって, 一般にはリスク中立確率測度は一意に定められない．そこで, 市場での (オプションなど派生商品の) 取引データからボラティリティの市場価格を計測することでリスク中立確率測度を定めないといけない．本稿では, ボラティリティの市場価格を γ_t としてダブルバリア・オプション の価格計算を行う．

新たに, 確率過程

$$\begin{aligned} W_t^\star &= W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{f(Y_s)} ds \\ Z_t^\star &= Z_t + \int_0^t \gamma_s ds \end{aligned}$$

を導入しよう．この二つの確率過程はリスク中立確率測度 Q^γ の下で標準ブラウン運動とする．これは, リスク中立確率測度 Q^γ を

$$\frac{dQ^\gamma}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(-\frac{1}{2}\int_0^t \{(\frac{\mu - r}{f(Y_s)})^2 + \gamma_s^2\} ds - \int_0^t \frac{\mu - r}{f(Y_s)} dW_s - \int_0^t \gamma_s dZ_s)$$

とした場合に対応している．本稿では, ボラティリテの市場価格 γ_t が有界なこととボラティリティの市場価格は確率過程 Y_t にのみ依存して決まることを仮定しておく．この仮定より, ボラティリティの市場価格は $\gamma_t = \Lambda(Y_t)$ と書ける．このとき, リスク中立確率測度において危険資産価格過程は確率微分方程式

$$\begin{aligned} dX_t^\epsilon &= rX_t^\epsilon dt + f(Y_t^\epsilon) X_t^\epsilon dW_t^\star \\ dY_t^\epsilon &= \{\frac{1}{\epsilon}(\bar{m} - Y_t^\epsilon) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}\Lambda(Y_t^\epsilon)\} dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}(\rho dW_t^\star + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t^\star) \\ \Lambda(y) &= \rho\frac{(\mu - r)}{f(y)} + \sqrt{1-\rho^2}\gamma(y) \end{aligned} \tag{3.5}$$

に従って変動することとなる．

前の章と同じように停止時刻 τ_1 と τ_2 を

$$\tau_1 = \inf\{t > 0 | X_t^\epsilon = l\}, \quad \tau_2 = \inf\{t > 0 | X_t^\epsilon = m\}$$

と定義する．さて、ダブルバリア・オプションのペイ・オフについて次の仮定をおく．

条件 3.1 危険資産価格過程がダブルバリア・オプションの満期までに上側境界 m および下側境界 l に達しないない場合, 満期において確率的なキャッシュ・フロー $F(X_T^\epsilon)$ が発生する．また, 満期までに危険資産価格過程が下側境界 l に達することなく上側境界 m に達すれば, 上側境界に達した時点で確率的なキャッシュ・フロー $G^\epsilon(t, Y_t^\epsilon)$ が発生する．一方, 満期までに危険資産価格過程が上側境界 m に達することなく下側境界 l に達すれば, 下側境界に達した時点で確率的なキャッシュ・フロー $H^\epsilon(t, Y_t^\epsilon)$ が発生する．

ダブルノックアウト・オプションやアップイン・ダウンアウト・オプションはここで定義されたダブルバリア・オプションの特殊例にあたる．

条件 3.2 条件 *3.1* におけるペイ・オフ関数 $G^\epsilon(Y^\epsilon_{\tau_1})$ および $H^\epsilon(Y^\epsilon_{\tau_2})$ は微小なパラメータ ϵ について展開が可能である．この展開において主項 *(*$O(1)$ 次オーダーの項*)* および $O(\sqrt{\epsilon})$ 次オーダーの項は確率過程 Y_t の水準と関係なく決まるとする．つまり，ペイ・オフ関数 $G^\epsilon(Y^\epsilon_{\tau_1})$ および $H^\epsilon(Y^\epsilon_{\tau_2})$ は

$$\begin{aligned} G^\epsilon(t,y) &= G_0(t) + \sqrt{\epsilon}G_1(t) + \cdots \\ H^\epsilon(t,y) &= H_0(t) + \sqrt{\epsilon}H_1(t) + \cdots \end{aligned}$$

という形に展開される．

この条件は, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるアップイン・ダウンアウト・オプションの解析などにおいては自然な条件である.

これらの条件の下で, ダブルバリア・オプションの価格を求めるには, 条件付期待値

$$\begin{aligned} P^\epsilon(t,x,y) &= E^{Q^\gamma}[e^{-r(\tau_1-t)}G^\epsilon(\tau_1,Y^\epsilon_{\tau_1})1_{\{\tau_1<\tau_2,\ \tau_1<T\}} + e^{-r(\tau_2-t)}H^\epsilon(\tau_2,Y^\epsilon_{\tau_2})1_{\{\tau_2<\tau_1,\ \tau_2<T\}} \\ &\quad + e^{-r(T-t)}F(X^\epsilon_T)1_{\{T<\tau_1,\tau_2\}}|X^\epsilon_t = x, Y^\epsilon_t = y] \end{aligned}$$

を計算すればよい．この条件付期待値は, 次の境界値問題

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^\epsilon P^\epsilon = 0 \\ P^\epsilon(T,x,y) = F(x),\ P^\epsilon(t,l,y) = G^\epsilon(t,y),\ P^\epsilon(t,m,y) = H^\epsilon(t,y) \end{gathered} \tag{3.6}$$

の解となっている．ただし, 作用素 $\mathcal{L}^\epsilon$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_0 &= \nu^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\bar{m}-y)\frac{\partial}{\partial y} \\ \mathcal{L}_1 &= \sqrt{2}\nu f(y)\rho x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \sqrt{2}\nu\Lambda(y)\frac{\partial}{\partial y} \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}f(y)^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r(x\frac{\partial}{\partial x} - \cdot) \end{aligned}$$

で与えられる．作用素 $\mathcal{L}_0$ はオルンシュタイン・ウーレンベック過程の生成作用素であり, 確率過程 $Y.$ の定常分布

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}}\exp(-\frac{(y-\bar{m})^2}{2\nu^2})$$

を解とする．作用素 $\mathcal{L}_1$ は相関係数を含む項である．この作用素を作用させると必ず y で微分することが特徴的である．作用素 $\mathcal{L}_2$ はボラティリティの水準を $f(y)$ に持つブラック・ショールズの作用素であり, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{BS}(f(y))$ という関係を持っている．

境界値問題 (3.6) は

$$P^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1 + \epsilon P_2 + \epsilon\sqrt{\epsilon}P_3 + \cdots$$

という形の解を持っている仮定として解析を行う．一番上のオーダーに対応する $O(1/\epsilon)$ のオーダーについては,

$$\mathcal{L}_0 P_0 = 0 \tag{3.7}$$

という関係が成り立たないといけない．方程式 (3.7) は解けるが, 変数 y に依存した解は y を無限に大きくすると発散してしまう．よって, この方程式の解 P_0 は変数 y とは無関係な解を持っている．

次に, ひとつ上のオーダー $O(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})$ の項を考えると

$$\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0$$

が成り立つ．既に指摘したように, 作用素 $\mathcal{L}_1$ は y 方向の微分を必ず行うことと, P_0 は変数 y に依存しないので

$$\mathcal{L}_0 P_1 = 0$$

が言える．これより P_1 は変数 y には依存しない関数である． オルンシュタイン・ウーレンベックの生成作用素 $\mathcal{L}_0$ により導出される定常分布による期待値を新しい記号 $\langle\cdot\rangle$ で表す．$O(1)$ 次のオーダー項を計算すると P_1 が y に依存しない関数なので,

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$$

が成り立つ．確率過程 Y_t の定常分布 Φ で両辺を積分すると

$$\langle\mathcal{L}_2\rangle P_0 = \langle\mathcal{L}_2 P_0\rangle = -\langle\mathcal{L}_0 P_2\rangle = -\int \Phi \mathcal{L}_0 P_2 dx = -\int \mathcal{L}_0^\star \Phi P_2 dx = 0$$

を導ける．ここで, $\mathcal{L}_0^\star$ は作用素 $\mathcal{L}_0$ の双対作用素で

$$\mathcal{L}_0^\star = -\frac{\partial}{\partial y}((\bar{m} - y)\cdot) + \frac{1}{2}\nu^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$$

と書ける．この結果, 次の境界値問題

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_0(t,x) = 0$$
$$P_0(T,x) = F(x),\ P_0(t,l) = G_0(x),\ P_0(t,m) = H_0(t)$$

を得る．ここで,　新しい定数 $\bar{\sigma}$ は $\bar{\sigma}^2 = \langle f(y)^2\rangle$ である．また関数 G_0 と H_0 はペイ・オフ関数 G^ϵ と H^ϵ の漸近展開の主項である．

次は, 確率ボラティリティによる価格の修正効果の大きさにあたる $O(\sqrt{\epsilon})$ オーダーの項を計算する．ここで $\langle\mathcal{L}_2 P_0\rangle = 0$, により

$$\mathcal{L}_2 P_0 = \mathcal{L}_2 P_0 - \langle\mathcal{L}_2 P_0\rangle = \frac{1}{2}(f(y)^2 - \bar{\sigma}^2) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_0$$

が成り立つ．このことから

$$
\begin{aligned}
P_2 &= -\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_2 P_0 \\
&= -\mathcal{L}_0^{-1}\frac{1}{2}(f(y)^2-\bar{\sigma}^2)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_0 \\
&= -\frac{1}{2}(\phi(y)+c(t,x))x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_0
\end{aligned}
$$

が言える．ここで, 新しい関数 ϕ は常微分方程式

$$
(\nu^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(\bar{m}-y)\frac{\partial}{\partial y})\phi=\mathcal{L}_0\phi=\frac{1}{2}(f(y)^2-\bar{\sigma})
$$

の解であり,

$$
\phi'=\frac{1}{\nu^2\Phi}\int_{-\infty}^{\cdot}(f^2-\langle f^2\rangle)\Phi
$$

が成り立つ．$O(\sqrt{\epsilon})$ 次の項を計算すると

$$
\mathcal{L}_0P_3+\mathcal{L}_1P_2+\mathcal{L}_2P_1=0 \tag{3.8}
$$

を得るが両辺を定常確率測度 Φ で積分すると

$$
\langle\mathcal{L}_2P_1-\mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2-\langle\mathcal{L}_2\rangle)P_0\rangle=0
$$

を得る．ここで、簡単な変数変換

$$
\tilde{P}_1=\sqrt{\epsilon}P_1,\ \tilde{G}_1=\sqrt{\epsilon}G_1,\ \tilde{H}_1=\sqrt{\epsilon}H_1,\ \text{および}\ \mathcal{A}=\sqrt{\epsilon}\langle\mathcal{L}_1\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2-\langle\mathcal{L}_2\rangle)\rangle
$$

を行う．$\tilde{P}_1$ の満たす偏微分方程式は

$$
\langle\mathcal{L}_2\rangle\tilde{P}_1=\mathcal{A}P_0
$$

で与えられる．右辺は更に計算できて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= V_2^\epsilon x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V_3^\epsilon x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} \\
V_2^\epsilon &= \frac{\nu\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}}(2\rho\langle f\phi'\rangle-\langle\Lambda\phi'\rangle) \qquad (3.9)\\
V_3^\epsilon &= \frac{\rho\nu\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}}\langle f\phi'\rangle \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

となる．係数 V_2^ϵ と V_3^ϵ はヒストリカル・ボラティリティ$\bar{\sigma}$ とインプライド・ボラティリティからキャリブレートできる．これについては, 3.2 章で述べるが詳細は Fouque, Papanicolaou=Sircar [2000] を参照のこと．確率ボラティリティによる修正項 $\tilde{P}_1$ は次の偏微分方程式

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\tilde{P}_1=\mathcal{A}P_0 \\
\tilde{P}_1(T,x)=0,\ \tilde{P}_1(t,l)=\tilde{G}_1(t),\tilde{P}_1(t,m)=\tilde{H}_1(t)
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

を満たす．方程式 (3.11) を解くために新しい変数

$$u = \tilde{P}_1 + (T-t)\mathcal{A}P_0$$

導入しよう．すると, 関数 $u(t,x)$ は境界値問題,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})u = 0 \\ &u(T,x) = 0, u(t,l) = g(t), u(t,m) = h(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

の解となる．ここで関数 $g(\cdot)$ と $h(\cdot)$ は

$$\begin{aligned} g(t) &= \tilde{G}_1(t) + (T-t)\mathcal{A}P_0|_{x=l+} \\ h(t) &= \tilde{H}_1(t) + (T-t)\mathcal{A}P_0|_{x=m-} \end{aligned}$$

で与えられる．さらに, 変数変換

$$\begin{aligned} z &= \log x \\ u(t,x) &= \exp\{(-\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2 - r)(T-t) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)z\}v(t,z) \end{aligned} \tag{3.13}$$

を行うと, 境界値問題 (3.12) は後退型熱方程式

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial v}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ &v(T,z) = 0,\ v(t,L) = \tilde{g}(t),\ v(t,M) = \tilde{h}(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

に変形される．ただし, 境界条件に現れた関数は

$$\tilde{g}(t) = \exp\{(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2 + r)(T-t)\}l^{(\frac{r}{\bar{\sigma}^2}-\frac{1}{2})}g(t) \tag{3.15}$$

$$\tilde{h}(t) = \exp\{(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2 + r)(T-t)\}m^{(\frac{r}{\bar{\sigma}^2}-\frac{1}{2})}h(t) \tag{3.16}$$

で定義される. ここで, L と M は $L = \log l$ および $M = \log m$ で与えられる．この方程式の解は条件付期待値を用いて表現され,

$$v(t,z) = E[\tilde{g}(\tilde{\tau}_1)1_{\{\tilde{\tau}_1<\tilde{\tau}_2,\tilde{\tau}_1\le T\}} + \tilde{h}(\tilde{\tau}_2)1_{\{\tilde{\tau}_2<\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2\le T\}}|\bar{\sigma}B_t = z \in [L,M]]$$

という解を持つ．ここで, $B.$ は標準 Q-ブラウン運動であり, 停止時刻 $\tilde{\tau}_1$ と $\tilde{\tau}_2$ は

$$\tilde{\tau}_1 = \inf\{t>0|B_t = L\},\ \tilde{\tau}_2 = \inf\{t>0|B_t = M\}$$

で定義される.

この条件付期待値を計算するために Lin [1998] の第 2 章で導かれた補題を紹介しよう.

補題 3.1 関数 $Q_a^{t,x}(s)$ と $Q_b^{t,x}(s)$ を

$$Q_L^{t,x}(s) = P[\tilde{\tau}_1<\tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_1<s|\bar{\sigma}B_t = x] \text{ および } Q_M^{t,x}(s) = P[\tilde{\tau}_2<\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2<s|\bar{\sigma}B_t = x]\ (s>t)$$

で定義する．これらの関数は時間 t 方向へ微分できて

$$q_L^{t,x}(s) = \frac{dQ_L^{t,x}}{ds}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(s-t;a_n) \text{ および } q_M^{t,x}(s) = \frac{dQ_M^{t,x}}{ds}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(s-t;b_n)$$

と書ける．ただし, 関数 f は

$$f(t;a) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

で定数 a_n と b_n は

$$a_n = \frac{2n(M-L)-L+x}{\bar{\sigma}} \; and \; b_n = \frac{2n(M-L)+M-x}{\bar{\sigma}}$$

で与えられるとする．

この補題は Lin [1998] においてラプラス変換を用いて求められた結果である．一方, 数理統計学における逐次検定問題への応用のために, より一般の結果が Anderson [1960] によって示されている．Anderson [1960] では, ブラウン運動のパスを数えあげた上で反射原理を繰り返し使い補題と同様の結果を求めている．次章では, ダブルノックアウト・オプションとアップイン・ダウンアウト・オプションという具体的な商品における価格評価にこの補題を用いる．

3.2 インプライド・ボラティリティと確率ボラティリティ・モデル

Fouque, Papnicolaou=Sircar [2000] の 5.3 章では, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるインプライド・ボラティリティの漸近展開表現を求めている．ここで, 時刻 t における行使価格 K, 満期 T のヨーロピアン・コールオプションの市場価格を $C_{obs}(K,T)$ とおこういま, ボラティリティ水準が σ の場合に上記のオプションの価格を $C_{BS}(t,x;K,T,\sigma)$ と書く．この式はブラック・ショールズ式である．インプライドボラティリティとは上の二つの式に対して

$$C_{BS}(t,x;K,T,I) = C_{obs}(K,T)$$

を満たす正数 I のことである．I を正確に計算するにはブラック・ショールズ式の逆関数を計算しないといけないが Fouque, Papnicolaou=Sircar [2000] により ϵ が十分に小さい場合は漸近展開表現が導かれており

$$I = a\frac{\log(K/S)}{T-t} + b + O(\epsilon)$$

と書かれる．$\frac{\log(K/S)}{T-t}$ はオプションごとに計算できるので, 市場データにフィットする定数 a と b を見つけるは容易である．一方, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルでは a と b は具体的に計算ができていて

$$\begin{aligned} a &= -\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \\ b &= \bar{\sigma} + \frac{V_3}{\bar{\sigma}^3}(r+\frac{3}{2}) - \frac{V_2}{\bar{\sigma}} \end{aligned}$$

となる．このことから, 市場で取引されているオプションから説明される V_2 と V_3 の水準を計算できる．(3.9) 式と (3.10) 式を見て分かるように V_2 と V_3 は確率過程 Y_t と関係するパラメータのみから計算される値であり, 実は経路依存型商品の計算を行うときにも同じ式を用いることとなる．よって, ヨーロピアン・オプション価格の市場データから V_2 と V_3 の値が決定すればダブルノックアウト・オプションなどの価格計算にも活用できる．詳しい解説は Fouque, Papanicolaou=Sircar [2000] などを見るとよい.

4　確率ボラティリティ・モデルとダブルバリア・オプション

4.1　ダブルノックアウト・オプション

本節では, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるダブルノックアウト・オプションの価格評価について考察を行う．リスク中立確率測度 Q において, 原資産価格過程は確率微分方程式 (3.5) に従うとする．ダブルノックアウト・オプションの価格は次の偏微分方程式

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{\epsilon}P^{\epsilon}=0\\ P^{\epsilon}(T,x,y)=(x-K)^{+},\ P^{\epsilon}(t,l,y)=0,\ P^{\epsilon}(t,m,y)=0\end{gathered}$$

を解くことで求まる．この微分方程式は境界値問題 (3.6) の特殊形になっており, (3.6) の境界条件を

$$F(x)=(x-K)^{+},\ G^{\epsilon}(t,y)=0,\ H^{\epsilon}(t,y)=0\ ,$$

で与えれば同じ問題になる．この境界条件は, 条件 3.2 の形式で記述した場合

$$F(x)=(x-K)^{+},G_0(t)=G_1(t)=\cdots=0,\ H_0(t)=H_1(t)=\cdots=0$$

と同値である．この方程式の解の主項は偏微分方程式

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0(t,x)=0\\ P_0(T,x)=(x-K)^{+},\ P_0(t,l)=0,\ P_0(t,m)=0\ .\end{gathered}$$

の解となっている．ところで, この方程式は既に (2.2) で与えられており, 解は定理 2.1 で与えられている．同様に, 確率ボラティリティ・モデルへの修正項となる $O(\sqrt{\epsilon})$ 項は境界値問題

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\tilde{P}_1=\mathcal{A}P_0\\ \tilde{P}_1(T,x)=0,\ \tilde{P}_1(t,l)=0,\ \tilde{P}_1(t,m)=0\ .\end{gathered}\tag{4.17}$$

の解で与えられる．前節の議論より, 適切な変数変換を行うと方程式は簡略化され

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial v}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0\\ v(T,z)=0,\ v(t,L)=\tilde{g}(t),\ v(t,M)=\tilde{h}(t)\end{gathered}\tag{4.18}$$

となる．この方程式は解析解を持っており方程式 (4.17) の解が具体的に求まる．境界条件の中で用いられている関数 $\tilde{g}(\cdot)$ と $\tilde{h}(\cdot)$ は境界値問題 (3.14) 中の境界条件を表現するのに使った関数 (3.15) および (3.16) に対応しており, 変数変換 (3.13) より

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) &= \exp\{(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2+r)(T-t)\}l^{(\frac{r}{\bar{\sigma}^2}-\frac{1}{2})}(T-t)\{V_2^{\epsilon}x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}+V_3^{\epsilon}x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\}|_{x=l} \\
\tilde{h}(t) &= \exp\{(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2+r)(T-t)\}m^{(\frac{r}{\bar{\sigma}^2}-\frac{1}{2})}(T-t)\{V_2^{\epsilon}x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}+V_3^{\epsilon}x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\}|_{x=m}
\end{aligned}$$

で与えられている．関数 $\xi(\delta,\gamma;x)$ は $\xi(\delta,\gamma;x)=x^{\delta}N(\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})$ で与えられており，この関数を用いると $L(\alpha_n,p,q)$ は

$$\begin{aligned}
L(\alpha_n;p,q) &= (\alpha_n)^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}+1}\{\xi(1,\log\frac{\alpha_n^2}{p}+(r+\bar{\sigma}^2/2)\tau;x)-\xi(1,\log\frac{\alpha_n^2}{q}+(r+\bar{\sigma}^2/2)\tau;x)\} \\
&\quad -Ke^{-r\tau}(\alpha_n)^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}-1}\{\xi(0,\log\frac{\alpha_n^2}{p}+(r-\bar{\sigma}^2/2)\tau;x)-\xi(0,\log\frac{\alpha_n^2}{q}+(r-\bar{\sigma}^2/2)\tau;x)\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

と表現できる．このことから $L(\alpha_n,p,q)$ の 2 階および 3 階微分を計算するためには $\xi(\cdot)$ の微分を計算しておけばよい．実際に計算を行うと

$$\begin{aligned}
\xi''(\delta,\gamma;x) &= x^{\delta-2}\{\delta(\delta-1)N(\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})+\frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}(2\delta-1-\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}^2\tau})n(\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})\} \\
\xi^{(3)}(\delta,\gamma;x) &= \delta(\delta-1)(\delta-2)x^{\delta-3}N(\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})+\frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}x^{\delta-3}n(\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}) \\
&\quad \times\{\delta(\delta-1)-\frac{1}{\bar{\sigma}^2\tau}+(2\delta-1-\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}^2\tau})(\delta-2-\frac{\log x+\gamma}{\bar{\sigma}^2\tau})\}
\end{aligned}$$

となる．また, 関数 $\eta(\delta,\gamma;x)$, を $\eta(\delta,\gamma;x)=x^{\delta}N(\frac{-\log x+\gamma}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}})=x^{\delta}-\xi(\delta,-\gamma;x)$ で定義しておけば関数 $L(\beta_n;p,q)$ は

$$\begin{aligned}
L(\beta_n;p,q) &= (\gamma_n)^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}+1}\{\eta(-\tfrac{2r}{\bar{\sigma}^2},\log\tfrac{\gamma_n^2}{p}+(r+\tfrac{\sigma^2}{2})\tau;x)-\eta(-\tfrac{2r}{\bar{\sigma}^2},\log\tfrac{\gamma_n^2}{q}+(r+\tfrac{\bar{\sigma}^2}{2})\tau;x)\} \\
&\quad -Ke^{-r\tau}(\gamma_n)^{\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}-1}\{\eta(1-\tfrac{2r}{\bar{\sigma}^2},\log\tfrac{\gamma_n^2}{p}+(r-\tfrac{\bar{\sigma}^2}{2})\tau;x)-\eta(1-\tfrac{2r}{\bar{\sigma}^2},\log\tfrac{\gamma_n^2}{q}+(r-\tfrac{\bar{\sigma}^2}{2})\tau;x)\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

と表現できる．ただし, $\gamma_n=(\frac{l^{n+1}}{m^n})$ である．$\eta(\delta,\gamma;x)$ の 2 階および 3 階微分を計算すると

$$\begin{aligned}
\eta''(\delta,\gamma;x) &= \delta(\delta-1)x^{\delta-2}-\xi''(\delta,-\gamma;x) \\
\eta^{(3)}(\delta,\gamma;x) &= \delta(\delta-1)(\delta-2)x^{\delta-3}-\xi^{(3)}(\delta,-\gamma;x)
\end{aligned}$$

となる．公式 (4.19) および (4.20) から $P_0(t,x)$ の 2 階および 3 階微分を計算できる．また, 定数 V_2^{ϵ} および V_3^{ϵ} は (3.9) および (3.10) で与えられている．これらを踏まえ, 補題 3.1 を用いて方程式 (4.18) を解くと,

$$v(t,z)=\int_t^T \tilde{g}(s)q_L^{t,z}(s)ds+\int_t^T \tilde{h}(s)q_M^{t,z}(s)ds \tag{4.21}$$

という解を持つことが分かる．このことから, $O(\sqrt{\epsilon})$ オーダーの補正項は

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1 &= -(T-t)\{V_2^{\epsilon}x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}+V_3^{\epsilon}x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\} \\ &\quad +x^{-\frac{1}{\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)}\exp\{-(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2-r)(T-t)\}v(t,\log x)\end{aligned}$$

で与えられる．

4.2 アップイン・ダウンアウト・オプション

次に, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおいてアップイン・ダウンアウト・オプションの評価を考察してみる．ここでも, 危険資産価格過程は確率微分方程式 (3.5) で記述できるとする．3 章の表記法を用いてアップイン・ダウンアウト・オプション価格の満たす偏微分方程式を記述すると

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{\epsilon}P^{\epsilon}=0 \\ P^{\epsilon}(T,x,y)=0,\ P^{\epsilon}(t,l,y)=0,\ P^{\epsilon}(t,m,y)=C^{\epsilon}(t,m,y)\end{gathered} \tag{4.22}$$

となる．ここで、関数 $C^{\epsilon}(t,x,y)$ は高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルでの行使価格 K, 満期 T 時刻 におけるヨーロピアン・コール・オプションの時刻 t で危険資産価格が x 確率ボラティリティを駆動する確率過程 $Y^{\epsilon}(t)$ の水準が y であった場合の価格である．この価格式は Fouque, Papanicolaou=Sircar [1999,2000] によって, 既に近似式が計算されており

$$C^{\epsilon}(t,x,y)=C_{BS}(t,x)+\sqrt{\epsilon}C_1(t,x)+\cdots$$

で与えられる．ただし $C_{BS}(t,x)$ はブラック・ショールズの価格公式であり, 関数 $C_1(t,x)$ は確率ボラティリティの効果による補正項である．$C_1(t,x)$ は具体的に

$$C_1(t,x)=-(T-t)(V_2^{\epsilon}x^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}+V_3^{\epsilon}x^3\frac{\partial^3 C_{BS}}{\partial x^3})$$

と書ける．ブラック・ショールズ式のパラメータによる微分は, グリークスと呼ばれ [1]

$$\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}=\frac{e^{-d_1^2/2}}{x\bar{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}},\ and\ \frac{\partial^3 C_{BS}}{\partial x^3}=\frac{-e^{-d_1^2/2}}{x^2\bar{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}}(1+\frac{d_1}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}})\ ,$$

と計算される．ただし d_1 は

$$d_1=\frac{\log(K/x)+(r+\bar{\sigma}^2/2)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}}$$

で与えられる．よって境界値問題 (3.6) は境界条件を

$$F(x)=0,\ G^{\epsilon}(t,y)=0,\ H^{\epsilon}(t,y)=C^{\epsilon}(t,m,y)$$

[1] 通常, $\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2}$ をガンマと呼ぶ．また,$\frac{\partial^3 C_{BS}}{\partial x^3}$ を Fouque, Papanicolaou=Sircar [2000] はイプシロンと呼んでいる．

とおけば, 境界値問題 (4.22) と同じ問題となる. この場合, 境界条件中の関数は漸近展開表示でき

$$G_0(t) = G_1(t) = \cdots = 0,\ H_0(t) = C_{BS}(t,m), H_1(t) = C_1(t,m), \ldots$$

となるが, この式は条件 3.1 を満たしている. すなわち主項と $O(\sqrt{\epsilon})$ 次の項 $G_0(t), H_0(t)$ および $G_1(t), H_1(t)$ は変数 y に依存しない関数となっている. 第 3 章の議論を用いると偏微分方程式の主項は

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P^0(t,x) = 0\\ P^0(T,x) = 0,\ P_0(t,l) = 0,\ P^0(t,m) = C_{BS}(t,m)\end{gathered}$$

である. この方程式の解は定理 2.2 で与えられている.

第 3 章で既に述べられているように, 高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルにおけるアップイン・ダウンアウト・オプション価格の $O(\sqrt{\epsilon})$ 次の項は境界値問題

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\tilde{P}_1 = \mathcal{A}P_0\\ \tilde{P}_1(T,x) = 0,\ \tilde{P}_1(t,l) = 0,\ \tilde{P}_1(t,m) = \tilde{C}_1(t,m)\end{gathered}$$

の解になっている.3 章で議論のように

$$u = \tilde{P}_1 + (T-t)\mathcal{A}P_0\ ,$$

と変数変換すると偏微分方程式

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})u = 0\\ u(T,x) = 0, u(t,l) = g(t), \tilde{P}_1(t,m) = h(t)\end{gathered} \tag{4.23}$$

を得る. ここで境界条件は

$$g(t) = (T-t)\{V_2^\epsilon x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3^\epsilon x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\}|_{x=l} \tag{4.24}$$

$$h(t) = \tilde{C}_1(t,m) + (T-t)\{V_2^\epsilon x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3^\epsilon x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\}|_{x=m} \tag{4.25}$$

で与えられる. 更に, 変数変換 (3.13) を行うと, 後退型熱方程式

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial v}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0\\ v(T,z) = 0,\ v(t,L) = \tilde{g}(t),\ v(t,M) = \tilde{h}(t)\end{gathered} \tag{4.26}$$

を得る. ここで境界条件中の関数 $\tilde{g}(\cdot)$ および $\tilde{h}(\cdot)$ は

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &= \exp\{(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2 + r)(T-t)\}l^{(\frac{r}{\bar{\sigma}^2}-\frac{1}{2})}g(t)\\ \tilde{h}(t) &= \exp\{(\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)^2 + r)(T-t)\}m^{(\frac{r}{\bar{\sigma}^2}-\frac{1}{2})}h(t)\end{aligned}$$

で与えられる．関数 $L(\alpha_n;p,\infty)$ と $L(\beta_n;p,\infty)$ は

$$
\begin{aligned}
L(\alpha_n;p,\infty) &= (\alpha_n)^{\frac{2r}{\bar\sigma^2}+1}\xi(1,\log\frac{\alpha_n^2}{p}+(r+\sigma^2/2)\tau;x) \\
&\quad -Ke^{-r\tau}(\alpha_n)^{\frac{2r}{\bar\sigma^2}-1}\xi(0,\log\frac{\alpha_n^2}{p}+(r-\sigma^2/2)\tau;x) \qquad (4.27)\\
L(\beta_n;p,\infty) &= (\gamma_n)^{\frac{2r}{\bar\sigma^2}+1}\eta(-\frac{2r}{\bar\sigma^2},\log\frac{\gamma_n^2}{p}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau;x) \\
&\quad -Ke^{-r\tau}(\gamma_n)^{\frac{2r}{\bar\sigma^2}-1}\eta(1-\frac{2r}{\bar\sigma^2},\log\frac{\gamma_n^2}{p}+(r-\frac{\bar\sigma^2}{2})\tau;x) \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

で与えられるので, ダブルノックアウト・オプションの価格評価で用いられた $\xi(\delta,\gamma;x)$ および $\eta(\delta,\gamma;x)$ の 2 階および 3 階微分の式を用いれば $\tilde{g}(t)$ と $\tilde{h}(t)$ を具体的に計算できる．これにより, 境界値問題 (4.26) は解

$$
v(t,z)=\int_t^T\tilde{g}(s)q_L^{t,x}(s)ds+\int_t^T\tilde{h}(s)q_M^{t,x}(s)ds \qquad (4.29)
$$

を持つ．偏微分方程式 (4.23) の解は

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_1 &= -(T-t)\{V_2^\epsilon x^2\frac{\partial^2P_0}{\partial x^2}+V_3^\epsilon x^3\frac{\partial^3P_0}{\partial x^3}\} \\
&\quad +x^{-\frac{1}{\bar\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\bar\sigma^2)}\exp\{(\frac{1}{2\bar\sigma^2}-(r-\frac{1}{2}\bar\sigma^2)^2-r)(T-t)\}v(t,\log x)
\end{aligned}
$$

と記述され, 補正項が計算できた.

5 数値計算結果

本節では, ダブルバリア・オプションの価格の高速平均回帰型確率ボラティリティ・モデルを入れた効果がどの程度のものか数値計算を通して確認をしてみる．前節までに議論された, ダブルノックアウト・オプションとアップイン・ダウンアウト・オプションの価格の漸近展開を用いて計算された価格とモンテカルロ法を用いて計算された価格を比較してみる.

本節では, 原資産価格過程はリスク中立確率測度において確率微分方程式

$$
\begin{aligned}
dX_t^\epsilon &= rX_t^\epsilon dt+e^{Y_t^\epsilon}X_t^\epsilon dW_t^\star \\
dY_t^\epsilon &= \{\frac{1}{\epsilon}(\bar{m}-Y_t^\epsilon)-\frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}\Lambda(Y_t^\epsilon)\}dt+\frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}(\rho dW_t^\star+\sqrt{1-\rho^2}dZ_t^\star) \\
\Lambda(y) &= \rho(\mu-r)e^{-y}+\gamma\sqrt{1-\rho^2}
\end{aligned}
$$

に従うものと仮定する． この確率微分方程式は第 2 節中の方程式 (3.5) においてボラティリティのリスクの価格 γ を定数とし, ボラティリティ関数 $f(\cdot)$ を指数関数, すなわち $i.e.\ f(y)=e^y$, とおくことで具体的な形を与えたモデルである．今回のシミュレーション

表 1: ダブルバリア・オプションの価格

ダブルノックアウト・オプション

L.B.	U.B.	M.C.	B.S.	A.E.
T=0.5				
800	1200	30.45	28.02	30.73
700	1300	48.92	47.20	50.00
600	1400	55.38	54.47	56.09
0	∞	57.22	56.60	57.57
T=1				
800	1200	18.69	17.31	18.66
700	1300	44.66	42.42	45.05
600	1400	65.77	63.35	66.36
0	∞	87.14	85.89	87.23
T=2				
800	1200	7.32	7.01	7.33
700	1300	27.12	26.09	27.34
600	1400	51.63	50.10	51.80
0	∞	134.64	132.85	134.64

アップイン・ダウンアウト・オプション

L.B.	U.B.	M.C.	B.S.	A.E.
T=0.5				
850	1100	51.33	51.75	51.66
850	1150	40.08	41.44	40.20
850	1200	26.74	28.57	26.42
T=1				
850	1100	83.23	82.65	83.28
850	1150	77.43	77.37	77.50
850	1200	67.49	67.94	67.43
T=2				
850	1100	124.75	123.46	124.28
850	1150	122.39	121.31	121.95
850	1200	118.26	117.50	117.96

図表中の T は満期までの長さを,L.B. と U.B. はそれぞれバリア・オプションの上側および下側境界を表す. 特に,L.B. が 0 で U.B. が ∞ の場合は, ヨーロピアン・オプションの価格をあらわす. また, M.C.,B.S. および A.E. はそれぞれモンテカルロ法, ブラック・ショールズ・モデル, 特異極限を用いて数値計算した結果である.

ではパラメータを $r = 0.04, \bar{m} = -\log 0.1, \nu = 1/\sqrt{2}, \mu = 0.2, \rho = -0.2, \gamma = 0$ で与えている. また, 後に解説を行う表 1 の計算においては $\epsilon = 1/200$ を選んで計算を行っている. このモデルは Fouque, Papnicolaou, Sircar=Solna [2003a] を参考に決めてある. この数値は Fouque, Papnicolaou, Sircar=Solna [2005] でキャリブレートしたパラメータにとても近い値である. 3.2 節の内容と比較した場合, 市場で観測されたインプライド・ボラティリティより係数 V_2^ϵ と V_3^ϵ が $V_2^\epsilon = -3.3 \times 10^{-4}, V_3^\epsilon = -8.48 \times 10^{-5}$, $\bar{\sigma} = 0.165$ およびて $\epsilon = 0.005$ としたときのパラメータに対応している. また, 全ての数値計算において, 現時点での原資産価格を $s = 1000$, 行使価格を $K = 1000$ として価格を計算している.

表 1 は上記のパラメータを用いの場合の数値計算の結果である. モンテカルロ実験では一回の時間幅を $\Delta t = 1/20,000$ と決めて $2,000,000$ 回オイラー法を用いてサンプル・パスを作成している. (ダブル) ノックアウト・オプションをモンテカルロ実験で計算すると, 時間幅 Δt に価格が強く依存するため Δt を十分小さくしないと精度よく価格が計算することができない. また, 今回計算する商品はノックアウト境界を越えると価格が付かなかったり越えた場合にのみ価格が計算されるという商品性により, 十分に多くのシミュレーションをしなければ, モンテカルロ法により計算される価格は精度よく計算することができない. これらの性質により, モンテカルロ実験には 1 回で数日の時間がかかっていることを

明記しておく．それに対し, 特異摂動を用いて計算されたオプション価格は数値積分にある程度時間が取られるものの極めて短い時間で計算することができる．ここで,V_2^ϵ と V_3^ϵ を上記のパラメータから計算する際に $f(y)=e^y$ とした時に成り立つ次の公式

$$
\begin{aligned}
\langle f\phi' \rangle &= \frac{1}{\nu^2}[e^{3\bar{m}+\frac{5}{2}\nu^2} - e^{3\bar{m}+\frac{9}{2}\nu^2}] \\
\langle \frac{1}{f}\phi' \rangle &= \frac{1}{\nu^2}[e^{\bar{m}+\frac{1}{2}\nu^2} - e^{\bar{m}+\frac{5}{2}\nu^2}]
\end{aligned}
$$

は有用である．これを見て分かるようにボラティィリティ関数を指数関数となるように選んだため,V_2^ϵ と V_3^ϵ などのパラメータは簡単に計算することができる．まず, 表 3.1 では上下の境界 (l,m) がそれぞれ $(800,1200)$, $(700,1300)$ および $(600,1400)$ に固定された場合のダブルノックアウト・オプションとヨーロピアン・コール・オプションの価格を計算してみた．また、上下の境界 (l,m) がそれぞれ $(850,1100)$, $(850,1150)$ および $(850,1200)$ に固定された場合のアップイン・ダウンアウト・オプションの価格もあわせて計算を行った．これらのケースでは, 全て十分な精度を持っているようである．特に, 満期までの期間が十分に長く, ノックアウト境界までの距離も十分に遠い場合のダブルノックアウト・オプション価格は精度よく計算できている．

一方で, ノックアウト境界までの距離が余りにも近く満期が長い場合のダブルノックアウト・オプションや、(ノックイン) 境界までの距離が余りにも遠く満期までの時間が近い場合のアップイン・ダウンアウト・オプションの価格を特異摂動を用いて計算すると精度よく計算ができないようである．とくに精度がよくない場合は, 原資産価格 $S_0=1000$(円) に対してオプション価格が数円程度と原資産に対して 0.数% 程度の価値しかない場合である．この場合は価格が余りにも小さすぎることが原因であるものと考えられる．なお, ヨーロピアン・オプションは満期が長いものほど特異極限を用いた場合の近似精度がよくなる傾向が知られている．ところが, ダブル・ノックアウト・オプションの場合, 満期が長いほどノックアウト境界への到達確率が増大し, 価格が安くなる傾向がある．一方で, 余りにも価格が安いと特異極限の近似精度が落ちる傾向にある．

図 1 は行使価格を変化させたときのダブルノックアウト・オプション価格を表している．図 1 の上側の線が確率ボラティリティの効果を入れた場合のダブルノックアウト・オプション価格であり, 下側は確率ボラティリティの効果を入れなかった場合 (ブラック・ショールズ・モデルにあたる) のダブルノックアウト・オプション価格である．この図では, 常に確率ボラティリティの効果はダブルノックアウト・オプションの価格を引き上げているが, これは常に成り立つ事実ではないようである．このことはモンテカルロ実験でも特異極限を用いた近似でも確かめられている．

図 2 は, 特異極限法を用いて計算された確率ボラティリティの補正効果を表す図である．行使価格を横軸にして確率ボラティリティによるダブルノックアウト・オプションの補正額をプロットしてある．相対的に上にある線が確率ボラティリティの補正効果全体を表現し, 下にある線は, 境界からの寄与分の効果である．これを見ると分かるように, 本文中で積分 (4.21) および (4.29) で与えられた境界からの確率ボラティリティの寄与分は無視できない大きさであることが分かる．

6 まとめ

近年, 確率ボラティリティ・モデルにおける金融派生商品の評価に特異摂動展開法を用いる手法が提案されるようになった. そこで, 本研究でも特異特異摂動展開法を用いて, 確率ボラティリティ・モデルにおけるダブルバリア・オプション価格について解析を行った. 確率ボラティリティ・モデルにおいてダブルノックアウト・オプション価格の計算を行うと, モンテカルロ法を用いた解析は計算時間がかかる. 一方, 特異摂動展開法を用いることできわめて短い時間である程度の精度の数値計算が可能である. また, 特異摂動展開法により, 確率ボラティリティによる補正項を計算するとノックアウト境界の存在による補正効果を表す部分と, 価格自体からの補正効果を表す部分の両方が現れるが, 両方共の効果を無視できないことが数値的に確認された. 今回の研究では, ボラティリティが速く動く場合に限って研究を行ったが, 今後は, 単純摂動展開と特異摂動展開を組み合わせることで, 速く動く成分とゆっくり動く成分の二つのファクターを持つボラティリティに対するダブルバリア・オプション価格の評価法なども研究の必要性があると考える.

参考文献

[1] 池田昌幸 [2000], 『オプション評価と企業金融の理論』, 東京大学出版会.

[2] Anderson, T.W. [1960] “A Modification of the Sequential Probability Ratio Test to Reduce the Sample Size”, *Annals of Mathematical Statisitcs* **31**, 165-197.

[3] Black, F. and Scholes, M. [1973] “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy* **81**, 637-659.

[4] Fouque, J.-P., Han, C.-H. [2003] “Pricing Asian Options with Stochastic Volatility”, *Quantitative Finance* **3**, 352-362.

[5] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., and Sircar, K. R. [1999] “Financial Modeling in a Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Environment”, *Asia-Pacific Financial Markets* **6**, 37-48.

[6] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., and Sircar, K. R. [2000] *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge.

[7] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., Sircar, K. R. and Solna, K. [2003a] “Singular Perturbations in Option Pricing Environment”, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **63**, 1648-1665.

[8] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., Sircar, K. R. and Solna, K. [2003b] “Multiscale Stochastic Volatility Asymptotics” ,*SIAM Journal of Multiscale Modeling and Simulation***2**,22-42.

[9] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., Sircar, K. R. and Solna, K. [2005] "Short Time-Scale in S&P 500 Volatility", *Journal of Computational Finance* **6**, 1-23.

[10] Hull, J. and White, A. [1987] "The Pricing Options on Asset with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance* **2**, 281-300.

[11] Ilhan, A., Jonsson, M., and Sircar, K. R. [2004] "Singular Perturbations for Boundary Value Problems Arising from Exotic Options", *SIAM Journal of Applied Mathematics* **64**, 1268-1293. .

[12] Kunitomo, N., and Ikeda, M. [1992] "Pricing Options with Curved Boundaries", *Mathematical Finance* **2**, 275-295.

[13] Lin, X. [1998] "Double Barrier Hitting Time Distributions with Applications to Exotic Options", *Insurance: Mathematics and Economics* **23**, 45-58.

[14] Luo, L. [2001] "Various Types of Double-Barrier Options", *Journal of Computational Finance* **4**, 125-138.

[15] Merton, R. C. [1973] "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Ecoconomics and Management Science* **4**, 141-183.

[16] Muroi, Y. [2006] "Pricing Lookback Options with Knock-out Boundaries", *Applied Mathematical Finance* **13**, 155-190.

[17] Wilmott, P., Howison, S. and Dewyne, J. [1995] *The Matematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge.

[18] Wong, H. -Y., and Chan, C. -M [2007] "Lookback Options and Dynamic Fund Protection under Multiscale Stochastic Volatility", *Insurance: Mathematics and Economics*, **40**, 357-385.